MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

Las matemáticas constituyen uno de los mayores logros culturales e intelectuales de la humanidad. A lo largo de la historia, las diferentes culturas se han esforzado en describir la naturaleza utilizando las matemáticas y en transmitir todo el conocimiento adquirido a las generaciones futuras. Hoy en día, ese patrimonio intelectual adquiere un valor fundamental ya que los grandes retos globales, como el respeto al medio ambiente, la eficiencia energética o la industrialización inclusiva y sostenible, a los que la sociedad tendrá que hacer frente, requieren de un alumnado capaz de adaptarse a las condiciones cambiantes, de aprender de forma autónoma, de modelizar situaciones, de explorar nuevas vías de investigación y de usar la tecnología de forma efectiva. Por tanto, resulta imprescindible para la ciudadanía del s. XXI la utilización de conocimientos y destrezas matemáticas como el razonamiento, la modelización, el pensamiento computacional o la resolución de problemas.

El desarrollo curricular de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II se orienta a la consecución de los objetivos generales de la etapa, prestando una especial atención al desarrollo y la adquisición de las competencias clave conceptualizadas en los descriptores operativos de Bachillerato que el alumnado debe conseguir al finalizar la etapa. Así, la interpretación de los problemas y la comunicación de los procedimientos y resultados están relacionados con la competencia en comunicación lingüística y con la competencia plurilingüe. El sentido de la iniciativa, el emprendimiento al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua enlazan con la competencia emprendedora. La toma de decisiones o la adaptación ante situaciones de incertidumbre son componentes propios de la competencia personal, social y de aprender a aprender. El uso de herramientas digitales en el tratamiento de la información y en la resolución de problemas entronca directamente con la competencia digital en cuyo desarrollo las matemáticas han jugado un papel fundamental. El razonamiento y la argumentación, la modelización y el pensamiento computacional son elementos característicos de la competencia STEM. Las conexiones establecidas entre las matemáticas y otras materias, y la resolución de problemas en contextos sociales están relacionados con la competencia ciudadana. Por otro lado, el mismo conocimiento matemático como expresión universal de la cultura contribuye a la competencia en conciencia y expresión culturales.

En continuidad con la Educación Secundaria Obligatoria, los ejes principales de las competencias específicas de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II son la comprensión efectiva de conceptos y procedimientos matemáticos junto con las actitudes propias del quehacer matemático, que permitan construir una base conceptual sólida a partir de la resolución de problemas, del razonamiento y de la investigación matemática, especialmente enfocados a la interpretación y análisis de cuestiones de las ciencias sociales. Las competencias específicas se centran en los procesos que mejor permiten al alumnado desarrollar destrezas como la resolución de problemas, el razonamiento y la argumentación, la representación y la comunicación, junto con las destrezas socioafectivas. Por este motivo recorren los procesos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación, además del desarrollo socioafectivo.

La resolución de problemas y la investigación matemática son dos componentes fundamentales en la enseñanza de las matemáticas, ya que permiten emplear los procesos cognitivos inherentes a esta materia para abordar y resolver situaciones relacionadas con las ciencias sociales, desarrollando el razonamiento, la creatividad y el pensamiento abstracto. Las competencias específicas de resolución de problemas, razonamiento y prueba, y conexiones están diseñadas para adquirir los procesos propios de la investigación matemática como son la formulación de preguntas, el establecimiento de conjeturas, la justificación y la generalización, la conexión entre las diferentes ideas matemáticas y el reconocimiento de conceptos y procedimientos propios de las matemáticas en otras materias, particularmente en las ciencias sociales. Debe resaltarse el carácter instrumental de las matemáticas como herramienta fundamental para materias científicas, sociales, tecnológicas, humanísticas y artísticas.

Otros aspectos importantes de la educación matemática son la comunicación y la representación. El proceso de comunicación ayuda a dar significado y permanencia a las ideas al hacerlas públicas. Por otro lado, para entender y utilizar las ideas matemáticas es fundamental la forma en que estas se representan. Por ello, se incluyen dos competencias específicas enfocadas a la adquisición de los procesos de comunicación y representación tanto de conceptos como de procedimientos matemáticos.

Con el fin de asegurar que todo el alumnado pueda hacer uso de los conceptos y de las relaciones matemáticas fundamentales, y también llegue a experimentar su belleza e importancia, se ha incluido una competencia específica relacionada con el aspecto emocional, social y personal de las matemáticas. Se pretende contribuir, de este modo, a desterrar ideas preconcebidas en la sociedad, como la creencia de que solo quien posee un talento innato puede aprender, usar y disfrutar de las matemáticas, o falsos estereotipos fuertemente arraigados, por ejemplo, los relacionados con cuestiones de género.

La adquisición de las competencias específicas se valorará con los criterios de evaluación, que ponen el foco en la puesta en acción de las competencias frente a la memorización de conceptos o la reproducción rutinaria de procedimientos.

Acompañando a las competencias específicas y a los criterios de evaluación se incluye el conjunto de saberes básicos que integran conocimientos, destrezas y actitudes. Dada la naturaleza de las competencias, en algunos casos la graduación de los criterios de evaluación entre los cursos primero y segundo se realiza a través de los saberes básicos. Estos han sido agrupados en bloques denominados «sentidos» como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos, métricos, algebraicos, estocásticos y socioafectivos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en la resolución de problemas o en la realización de tareas. Es importante destacar que el orden de aparición de los sentidos y, dentro de ellos, de los saberes no supone ninguna secuenciación.

El sentido numérico se caracteriza por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, y por el desarrollo de destrezas y modos de hacer y de pensar basados en la comprensión, la representación, el uso flexible de los números, de objetos matemáticos formados por números y de las operaciones. El sentido de la medida se centra en la comprensión y comparación de atributos de los objetos del mundo que nos rodea, así como de la medida de la incertidumbre. El sentido algebraico proporciona el lenguaje en el que se comunican las matemáticas. Por ejemplo, son características de este sentido ver lo general en lo particular, reconocer patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresarlas mediante diferentes representaciones, así como modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas. El pensamiento computacional y la modelización se han incorporado en este bloque, pero no deben interpretarse como exclusivos del mismo, sino que deben desarrollarse también en el resto de los bloques de saberes. El sentido estocástico comprende el análisis y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en una amplia variedad de situaciones. Por último, el sentido socioafectivo implica la adquisición y aplicación de conocimientos, destrezas y actitudes necesarias para entender y manejar las emociones que aparecen en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, además de adquirir estrategias para el trabajo en equipo. Este sentido no debe trabajarse de forma aislada, sino a lo largo del desarrollo de la materia.

Las matemáticas no son una colección de saberes separados e inconexos, sino que constituyen un campo integrado de conocimiento. El conjunto de competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos están diseñados para constituir un todo que facilite el planteamiento de tareas sencillas o complejas, individuales o colectivas de carácter multidisciplinar. El uso de herramientas digitales para analizar e interpretar situaciones de las ciencias sociales juega un papel esencial, ya que procesos y operaciones que con anterioridad requerían sofisticados métodos manuales pueden abordarse en la actualidad de forma sencilla mediante el uso de calculadoras, hojas de cálculo u otro *software* específico, favoreciendo el razonamiento frente a los aprendizajes memorísticos y rutinarios.

I. Competencias específicas

Competencia específica de la materiamatemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales1:

CE.MCS.1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de las Ciencias Sociales aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.

Descripción

La modelización y la resolución de problemas constituyen un eje fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, ya que son procesos centrales en laconstrucción del conocimiento matemático. La comprensión de una situación o problema es siempre el primer paso hacia su exploración o resolución. Una buena representación o visualización del problema ayuda a su interpretación, así como a la identificación de los datos y las relaciones más relevantes.

El desarrollo de esta competencia conlleva los procesos de formulación del problema; la sistematización en la búsqueda de datos u objetos relevantes y sus relaciones; su codificación al lenguaje matemático o a un lenguaje fácil de interpretar por un sistema informático; la creación de modelos abstractos de situaciones reales, y el uso de estrategias de resolución, como la analogía con otros problemas, estimación, ensayo y error, resolverlo de manera inversa (ir hacia atrás), la descomposición en problemas más sencillos o la utilización de técnicas heurísticas, entre otras.

Estos procesos aplicados en contextos diversos pueden motivar el aprendizaje y establecer unos cimientos cognitivos sólidos que permitan construir conceptos y experimentar las matemáticas como herramienta para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida cotidiana o de las Ciencias Sociales. Asimismo, la resolución de un problema con distintas estrategias permite comparar las ventajas relativas a cada una de ellas. A través de la discusión de los estudiantes en la tarea de resolución de problemas se favorece la construcción de significados compartidos y la mejora del aprendizaje. Los contextos, en la resolución de problemas, proporcionan un amplio abanico de posibilidades para la integración de las distintas experiencias y aprendizajes del alumnado, así como de las diferentes competencias con una perspectiva global, fomentando el respeto mutuo y la cooperación entre iguales, con especial atención a la igualdad de género, la inclusión y la diversidad personal y cultural. Ofrecen una oportunidad para integrar las ocho competenciasclave e incluir el planteamiento de problemas sociales, fomentando que el alumnado se haga partícipe de los mismos y desarrolle la actitud necesaria para implicarse activamente en su futuro.

Vinculación con otras competencias

Las competencias específicas CE.MCS.1, CE.MCS.2, CE.MCS.3 y CE.MCS.4 están directamente relacionadas con la resolución de problemas y la modelización matemática en contextos diversos, por lo tanto, su desarrollo se vincula de forma natural. El desarrollo de esta competencia también tiene, por tanto, una íntima relación con las competencias específicas CE.MCS.5, CE.MCS.6 y CE.MCS.7, que lleva a relacionar los saberes de la materia de Matemáticas entre sí y con los de las otras materias, desde un enfoque globalizador. Asimismo, esta competencia está vinculada con el CE.MCS.8 porque el desarrollo de ésta conlleva procesos de formulación del problema y de verbalización acerca del proceso de resolución realizado y de la validez de las soluciones encontradas. Por último, está relacionada con la competencia específica CE.MCS.9 en la gestión de las emociones que surgen cuando nos enfrentamos a un problema.

Sin ánimo de exhaustividad, se identifican vínculos con competencias de asignaturas de Economía como la CE.E.6 (analizar los problemas económicos actuales mediante el estudio de casos, la investigación y la experimentación, utilizando herramientas del análisis económico…) y de Economía, Emprendimiento y Actividad Empresarial, como la CE.EEAE.1 (analizar de forma crítica y reflexiva las aportaciones de la ciencia económica, valorando su interrelación con otras disciplinas, para entender la realidad desde una visión integral…).

Vinculación con los descriptores de las competencias clave

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD5, CPSAA4, CPSAA5, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales2:

CE.MCS.2. Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.

Descripción

Tras la resolución de un problema, el alumnado tiende a dar por finalizada la actividad, omitiendo una parte importante y que resulta muy constructiva. El análisis de las soluciones obtenidas en la resolución de un problema potencia la reflexión crítica, el razonamiento y la argumentación. La interpretación de las soluciones y conclusiones obtenidas, considerando además de la validez matemática diferentes perspectivas como la sostenibilidad, el consumo responsable, la equidad, la no discriminación o la igualdad de género, entre otras, ayuda a tomar decisiones razonadas y a evaluar las estrategias. Además, el análisis de la solución o soluciones, así como el camino realizado para resolver un problema ayuda a consolidar los conocimientos y desarrollar aptitudes para la resolución de problemas (Polya, 1965, Schoenfeld, 1985, Mason et al., 2010). Los razonamientos científico y matemático serán las herramientas principales para realizar esa validación, pero también lo son la lectura atenta, la realización de preguntas adecuadas, la elección de estrategias para verificar la pertinencia de las soluciones obtenidas según la situación planteada, la conciencia sobre los propios progresos y la autoevaluación.

El desarrollo de esta competencia conlleva procesos reflexivos propios de la metacognición como la autoevaluación y la coevaluación, el uso eficaz de herramientas digitales, la verbalización o la descripción del proceso y la selección entre diferentes modos de comprobación de soluciones o de estrategias para validar las soluciones y evaluar su alcance.

Vinculación con otras competencias

Las competencias específicas CE.MCS.1, CE.MCS.2, CE.MCS.3 y CE.MCS.4 están directamente relacionadas con la resolución de problemas y la modelización matemática en contextos diversos, por lo tanto, su desarrollo se vincula de forma natural. El desarrollo de esta competencia también tiene, por tanto, una íntima relación con las competencias específicas CE.MCS.5 y CE.MCS.6, que lleva a relacionar los saberes de la materia de Matemáticas entre sí y con los de las otras materias, desde un enfoque globalizador. Asimismo, esta competencia está vinculada con el CE.MCS.8 porque el desarrollo de esta conlleva procesos de formulación del problema y de verbalización acerca del proceso de resolución realizado y de la validez de las soluciones encontradas. Por último, está relacionada con la competencia específica CE.MCS.9 en la gestión de las emociones que surgen cuando nos enfrentamos a un problema.

Vinculación con los descriptores de las competencias clave

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM1, STEM2, CD3, CPSAA4, CC3, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 3:

CE.MCS.3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.

Descripción

La formulación de conjeturas y la generación de problemas de contenido matemático sondos componentes importantes y significativos del currículo de matemáticas y están consideradas una parte esencial del quehacer matemático. Probar o refutar conjeturas con contenido matemático sobre una situación planteada o sobre un problema ya resuelto implica plantear nuevas preguntas, así como la reformulación del problema durante el proceso de investigación.

Cuando el alumnado genera problemas o realiza preguntas, mejora el razonamiento y la reflexión al tiempo que construye su propio conocimiento, lo que se traduce en un alto nivel de compromiso y curiosidad, así como de entusiasmo hacia el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo de esta competencia puede fomentar un pensamiento más diverso y flexible, mejorar la destreza para resolver problemas en distintos contextos y establecer puentes entre situaciones concretas y las abstracciones matemáticas.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia se relaciona con todas las competencias específicas de la materia de Matemáticas. En especial, tiene una conexión muy cercana con las competencias de resolución de problemas, CE.MCS.1 y CE.MCS.2, con CE.MCS.4, que incide en otro tipo de razonamiento, y con CE.MCS.8. que aborda aspectos de comunicación matemática. También es obvio que tiene especial vinculación con todas las competencias específicas de las materias de Matemáticas y Matemáticas Generales de otras modalidades de Bachillerato, en particular con CE.M3 y CE.MG.3.

Por otro lado, el desarrollo de esta competencia matemática en razonamiento y argumentación debería tener como objetivo adicional que el alumnado la ponga en juego en el ámbito de su vida cotidiana y en otras materias. Los vínculos que establezcan con competencias de otras materias deberían facilitar la transferencia a otros contextos y modos de razonamiento. Sin ánimo de ser exhaustivo, el desarrollo de la argumentación en esta materia permite analizar distintas prácticas argumentativas, identificando las relaciones entre que afectan a esta competencia también se relacionan con competencias de materias comunes como CE.FI.3., CE.HF.2., CE.LCL.3., CE.LCLT.5., CE.LEI.2. y CE.LEF.2.

En cuanto al razonamiento matemático y la formulación de preguntas y verificación de conjeturas también es básico en el desarrollo del pensamiento científico y por eso tiene vínculos evidentes con competencias específicas de las materias del Bachillerato de Ciencias y Tecnologías, como CE.FQ.2., CE.F.5., CE.Q.5., CE.BGCA.4., CE.B.4, CE.GCA.4., CE.DT.2. y CE.TI.4., entre otras. Finalmente, destacamos la relación con CE.CG.4. de la materia Ciencias Generales de la modalidad de Bachillerato General.

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD3, CD5, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 4:

CE.MCS.4. Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de las ciencias sociales.

Descripción

El pensamiento computacional entronca directamente con la resolución de problemas y el planteamiento de procedimientos algorítmicos. Con el objetivo de llegar a una solución del problema que pueda ser ejecutada por un sistema informático, será necesario utilizar la abstracción para identificar los aspectos más relevantes y descomponer el problema en tareas más simples que se puedan codificar en un lenguaje apropiado. Llevar el pensamiento computacional a la vida diaria y al ámbito de las ciencias sociales supone relacionar las necesidades de modelado y simulación con las posibilidades de su tratamiento informatizado.

El desarrollo de esta competencia conlleva la creación de modelos abstractos de situaciones cotidianas y del ámbito de las ciencias sociales, su automatización y la codificación en un lenguaje fácil de interpretar de forma automática.

Vinculación con otras competencias

Por su naturaleza el pensamiento computacional está vinculado con el resto de las competencias específicas, si bien más estrechamente con la CE.MCS.1, CE.MCS.2, CE.MCS.3, CE.MCS.5 y CE.MCS.7 ya que permite modelar de forma dinámica situaciones tanto de conceptos y relaciones matemáticas como situaciones contextualizadas del ámbito de las Ciencias Sociales en la que haya que manejar grandes cantidades de datos. Otra característica importante del pensamiento computacional es también la simulación y que permite investigar, conjeturar, hacerse preguntas y buscar diferentes estrategias y soluciones, verificando la validez de las mismas. Por ello, colabora a elaborar argumentos para justificar la respuesta con un cierto rigor matemático y poderla comunicar de forma individual y colectiva vinculando así con la CE.MCS.8.

Se identifican vínculos con competencias de la materia Ciencias Generales como la CE.CG.4 (Aplicar el pensamiento científico y los razonamientos lógico-matemáticos, mediante la búsqueda y selección de estrategias y herramientas apropiadas, para resolver problemas relacionados con las ciencias experimentales); con la materia de Economía, Emprendimiento y Actividad Empresarial como las CE.EEAE.5 y CE.EEAE.6 (Comprender diferentes estrategias y modelos empresariales , y analizar la transformación económica y social y sus consecuencias, reconociendo la importancia que tienen la innovación y la revolución digital en la actividad empresarial, para comprender las respuestas que las empresas ofrecen a los desafíos actuales y proponer alternativas y nuevas soluciones a dichos desafíos) , con la materia de Geografía en la CE.G.4 ("Aplicar las Tecnologías de la Información Geográfica (TIG), métodos y técnicas propios o de ciencias afines, localizando fenómenos naturales y humanos, y argumentando con rigor sus límites o categorías, para resolver eficientemente el problema de la escala en cualquier análisis o propuesta de actuación, y con la materia de Historia de España CE.HE.3 (analizar y valorar la idea de progreso desde la perspectiva del bienestar social y de la sostenibilidad a través de de la interpretación de factores modernizadores de la economía española) ya que se requiere del ejercicio de habilidades econométricas, el uso de bases estadísticas, la lectura de gráficos, el manejo de datos y recursos digitales.

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 5:

CE.MCS.5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático

Descripción

Establecer conexiones entre las diferentes ideas matemáticas proporciona una comprensión más profunda de cómo varios enfoques de un mismo problema pueden producir resultados equivalentes. El alumnado puede utilizar ideas procedentes de un contexto para probar o refutar conjeturas generadas en otro y, al conectar las ideas matemáticas, puede desarrollar una mayor comprensión de los problemas. Percibir las matemáticas como un todo implica estudiar sus conexiones internas y reflexionar sobre ellas, tanto las existentes entre los bloques de saberes como entre las matemáticas de un mismo o distintos niveles, o las de diferentes etapas educativas.

El desarrollo de esta competencia conlleva enlazar las nuevas ideas matemáticas con ideas previas, reconocer y utilizar las conexiones entre ellas en la resolución de problemas y comprender cómo unas ideas se construyen sobre otras para formar un todo integrado.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia trata de evitar una excesiva compartimentación en temas, lecciones o bloques, para buscar que el alumnado interiorice, ya en esta etapa de acercamiento a una matemática más avanzada, una cohesión entre todos los diversos sentidos matemáticos, dando margen al alumnado para reflexionar sobre las situaciones presentadas y aportar soluciones que no necesariamente tienen que estar completamente ligadas al contenido que se esté trabajando en ese momento. Las competencias más vinculadas con ésta son las CE.MCS.1 (Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas…) y CE.MCS.2 (Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas…) y la CE.MCS.6 (Descubrir los vínculos con otras materias y profundizar en sus conexiones…).

Adquirir esta competencia implica tener una visión global de las matemáticas lo que hace que tenga también una aplicación importante en otras materias relacionada con el ámbito de las Ciencias Sociales, como por ejemplo, CE.CG.4 (Aplicar el pensamiento científico y los razonamientos lógico-matemáticos, mediante la búsqueda y selección de estrategias y herramientas apropiadas, para resolver problemas relacionados con las ciencias experimentales) y CE.EEAE.1 (Analizar de forma crítica y reflexiva las aportaciones de la ciencia económica, valorando su interrelación con otras disciplinas, para entenderla realidad desde una visión integral …) .

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.

Competencia específica de la materia matemáticasaplicadas a las Ciencias Sociales 6:

CE.MCS.6. Descubrir los vínculos de las matemáticas con otras materias y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.

Descripción

Observar relaciones y establecer conexiones matemáticas es un aspecto clave del quehacer matemático. El aumento de los conocimientos matemáticos y de la destreza para utilizar un amplio conjunto de representaciones, así como el establecimiento de conexiones entre las Matemáticas y otras materias, especialmente con las Ciencias Sociales, confieren al alumnado un gran potencial para resolver problemas en situaciones diversas.

Estas conexiones también deberían ampliarse a las actitudes propias del quehacer matemático de forma que éstas puedan ser transferidas a otras materias y contextos. En esta competencia juega un papel relevante la aplicación de las herramientas tecnológicas en el descubrimiento de nuevas conexiones.

El desarrollo de esta competencia conlleva el establecimiento de conexiones entre ideas, conceptos y procedimientos matemáticos, otras materias y la vida real. Asimismo, implica el uso de herramientas tecnológicas y su aplicación en la resolución de problemas en situaciones diversas, valorando la contribución de las matemáticas a la resolución de los grandes retos y objetivos ecosociales, tanto a lo largo de la historia como en la actualidad.

Vinculación con otras competencias

Para identificar las matemáticas en otras materias es necesario ser consciente de lo que las matemáticas aportan al conjunto de saberes que se adquieren en la etapa, así como su carácter instrumental como herramienta en ramas del conocimiento científico-tecnológico, social, humanístico y artístico. Por ello, aun teniendo conexión con todas las demás , las conexiones fundamentales se dan con CE.MCS.1 (modelizar problemas de la vida cotidiana), CE.MCS.2 (analizar las soluciones de un problema), CE.MCS.3 (conjeturar), CE.MCS.4 (pensamiento computacional) y CE.MCS.8 (comunicar) ya que para desarrollarla es necesario trabajar con herramientas tecnológicas de diferentes tipos que faciliten el trabajo con grandes cantidades de datos, que faciliten la visualización de ideas y que permitan invertir el tiempo de trabajo en generar preguntas e investigar estrategias para darles respuesta estando atentos a las relaciones y vínculos con otras materias diversas y finalmente ser capaces de comunicar los resultados obtenidos .

En esta asignatura son los temas relacionados con las Ciencias Sociales los que permiten establecer conexión con competencias de otras materias como la Economía, CE.E.4 (analizar elementos que intervienen en decisiones financieras) y CE.EEAE.1 (analizar de forma crítica y reflexiva las aportaciones de la ciencia económica valorando su interrelación con otras disciplinas…), en Geografía CE.G.4 .(Aplicar las Tecnologías de la Información Geográfica (TIG), métodos y técnicas propios o de ciencias afines, para resolver eficientemente el problema de la escala en cualquier análisis o propuesta de actuación).

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM1, STEM2, CD2, CPSAA5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.

Competencia específica de la materia matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 7:

CE.MCS.7. Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.

Descripción

Las representaciones de conceptos, procedimientos e información matemáticos facilitan el razonamiento y la demostración, se utilizan para visualizar ideas matemáticas, examinar relaciones y contrastar la validez de las respuestas y se encuentran en el centro de la comunicación matemática.

El desarrollo de esta competencia conlleva el aprendizaje de nuevas formas de representación matemática y la mejora del conocimiento sobre su utilización de forma eficaz, recalcando las maneras en que representaciones distintas de los mismos objetos pueden transmitir diferentes informaciones y mostrando la importancia de seleccionar representaciones adecuadas a cada tarea.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia se vincula con la CE.MCS.5 que conlleva el establecimiento de conexiones entre ideas conceptos y procedimientos matemáticos, que representados de diversas formas usando variadas herramientas tecnológicas, permite fomentar un pensamiento más flexible y diverso (CE.MCS.4, CE.MCS.1), mejorando el razonamiento y la argumentación (CE.MCS.3) y la comunicación de los resultados obtenidos (CE.MCS.8).

Dominar esta competencia implica saber seleccionar aquella información que es adecuada y coherente de entre todas aquellas de las que están a disposición. Aunque en esta asignatura tiene un carácter evidentemente matemático, no deja de ser una competencia que conecta con las de otras materias en las que se requiere analizar fuentes de información que incluyen elementos matemáticos para tomar decisiones o valorar estrategias, como por ejemplo CE.CG.4 (Aplicar el pensamiento científico y los razonamientos lógico-matemáticos, mediante la búsqueda y selección de estrategias y herramientas apropiadas, para resolver problemas relacionados con las ciencias experimentales.), CE.G.4 (Aplicar las Tecnologías de la Información Geográfica (TIG), métodos y técnicas propios o de ciencias afines, localizando fenómenos naturales y humanos, y argumentando con rigor sus límites o categorías, para resolver eficientemente el problema de la escala en cualquier análisis o propuesta de actuación).

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.1, CCEC4.2.

Competencia específica de la materia matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 8:

CE.MCS.8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

Descripción

En la sociedad de la información se hace cada día más patente la necesidad de una comunicación clara y veraz, tanto oralmente como por escrito. Interactuar con otros ofrece la posibilidad de intercambiar ideas y reflexionar sobre ellas, colaborar, cooperar, generar y afianzar nuevos conocimientos, convirtiendo la comunicación en un elemento indispensable en el aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo de esta competencia conlleva expresar públicamente hechos, ideas, conceptos y procedimientos complejos verbal, analítica y gráficamente, de forma veraz y precisa, utilizando la terminología matemática adecuada, con el fin de dar significado y permanencia a los aprendizajes.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia conecta con las siguientes: CE.MCS.1 y CE.MCS.2 porque el desarrollo de éstas conlleva procesos de formulación del problema y de verbalización acerca del proceso de resolución realizado y de la validez de las soluciones encontradas. Por otro lado, comunicar supone en matemáticas emplear tanto el lenguaje verbal, como gráfico, y simbólico, y es necesario saber comunicar la relación entre estos diferentes sistemas de representación de un concepto o idea, el uso de herramientas tecnológicas es muy útil para desarrollar esta habilidad, por lo que también está conectada con las competencias CE.MCS.4, CE.MCS.6 y CE.MCS.7. Por último, también conecta con CE.MCS.9 que conlleva identificar y gestionar las propias emociones en el proceso de aprendizaje, respetando opiniones, teniendo una escucha activa y siendo asertivos y colaborativos en el trabajo en equipo.

En otras materias se busca también intercambiar ideas o soluciones a problemas tecnológicos o digitales siendo uno de los objetivos el comunicar y difundir información y/o estrategias de forma efectiva, respetuosa tanto de manera individual como de equipo, por lo que conecta con las competencias CE.TD.4 (Tecnología y Digitalización) y CE.EE.5 (Economía y Emprendimiento).

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CCEC3.2.

Competencia específica de la materia matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 9:

CE.MCS.9. Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas.

Descripción

La resolución de problemas o de retos más globales en los que intervienen las matemáticas representa a menudo un desafío que involucra multitud de emociones que conviene gestionar correctamente. Las destrezas socioafectivas dentro del aprendizaje de las matemáticas fomentan el bienestar del alumnado, la regulación emocional y el interés por su estudio.

Por otro lado, trabajar los valores de respeto, igualdad o resolución pacífica de conflictos, al tiempo que se superan retos matemáticos de forma individual o en equipo, permite mejorar la autoconfianza y normalizar situaciones de convivencia en igualdad, creando relaciones y entornos de trabajo saludables. Asimismo, fomenta la ruptura de estereotipos e ideas preconcebidas sobre las matemáticas asociadas a cuestiones individuales, como por ejemplo las relacionadas con el género o con la existencia de una aptitud innata para las matemáticas.

El desarrollo de esta competencia conlleva identificar y gestionar las propias emociones en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, reconocer las fuentes de estrés, ser perseverante en la consecución de los objetivos, pensar de forma crítica y creativa, crear resiliencia y mantener una actitud proactiva ante nuevos retos matemáticos. Asimismo, implica mostrar empatía por los demás, establecer y mantener relaciones positivas, ejercitar la escucha activa y la comunicación asertiva en el trabajo en equipo y tomar decisiones responsables.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia se vincula con todas las competencias de la materia a través de los procesos de resolución de problemas. Es obvio que también tiene vinculación con las competencias específicas CE.M.9 y CE.MCS.9 de las asignaturas Matemáticas y Matemáticas Generales de otras modalidades de Bachillerato.

Sin ánimo de exhaustividad, se relaciona también con otras competencias específicas de materias comunes como CE.EF.2., CE.EF.3., CE.FI.5., CE.LCL.10., CE.LE.3 o CE.HE.7. También está relacionada con las competencias de otras materias del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales como CE.G.7 ó CE.HA.2.

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: CP3, STEM5, CPSAA1.1, CPSAA1.2, CPSAA3.1, CPSAA3.2, CC2, CC3, CE2.

II. Criterios de evaluación

La evaluación del alumnado será formativa, continua y diferenciada y tendrá en cuenta su progreso en el conjunto de los procesos de aprendizaje. La evaluación debe cumplir, en primer lugar, una función de comunicación. Se trata de que el profesorado recoja evidencias del aprendizaje del alumnado y actúe en consecuencia con las estrategias didácticas y pedagógicas adecuadas, informando al alumnado de su progreso y cómo mejorar, así como a las familias y tutores legales. Los procesos de evaluación deben ser coherentes y estar alineados con la búsqueda de una cultura de aula inclusiva en la que el conocimiento se construye entre todos a través de la negociación de significados en un ambiente de resolución de problemas. Por lo tanto, otra función de la evaluación es la de empoderar esa cultura de aula y facilitar su conformación. Es decir, la evaluación no debe plantearse como algo ajeno a los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino como un elemento integrado. En el apartado IV.2. Evaluación de los aprendizajes, se desarrollará más estas ideas.

La observación y análisis de las producciones del alumnado, a partir de los instrumentos pertinentes, proporciona múltiples oportunidades para evaluar el desarrollo de cada competencia en relación con los diferentes saberes matemáticos. En cuanto a los instrumentos de evaluación, se recomienda emplear instrumentos variados, diversos, flexibles y adaptados a las distintas situaciones de aprendizaje que permitan la valoración objetiva de todo el alumnado, y que garanticen, asimismo, que las condiciones de realización de los procesos asociados a la evaluación se adaptan a las necesidades del alumnado con necesidad específica de apoyo educativo.

Los criterios de evaluación que se presentan a continuación son el referente para evaluar el desarrollo de las competencias específicas. Se trata de criterios amplios, que han tratado de matizarse ligeramente en cada caso en función de los cursos (Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

II). En cualquier caso, los criterios deben interpretarse en conjunción con las situaciones de aprendizaje que se planteen en cada curso y en torno a los saberes de cada uno de los sentidos matemáticos.

<table>
<tr><th colspan="2">CE.MCS.1</th></tr>
<tr><td colspan="2">Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de las Ciencias Sociales aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para la evaluación de esta primera competencia, se deben establecer criterios que pongan el foco en dos procesos propios de la actividad matemática, como son, por un lado, la formulación matemática de las situaciones para reconocer oportunidades para utilizar las matemáticas y proporcionar la estructura matemática a un problema presentado de forma contextualizada y, por otro lado, el empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos para la resolución de dichos problemas, ya matematizados, sobre los que el alumnado debe ejecutar los procedimientos matemáticos necesarios para obtener resultados y encontrar una solución matemática.

Durante la formulación matemática de las situaciones o problemas, el alumnado realiza actividades como, por ejemplo, identificar los aspectos matemáticos de un problema situado en un contexto del mundo real y sus variables significativas; reconocer la estructura matemática (incluidas las regularidades, las relaciones y los patrones) en los problemas o situaciones; simplificar una situación o problema para que sea susceptible de analizarlo matemáticamente; seleccionar un determinado modelo matemático que se ajuste a una situación; identificar las limitaciones y supuestos que están detrás de cualquier construcción de modelos y de las simplificaciones que se deducen del contexto, entre otras. Durante el empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos para obtener las soluciones de un problema o situación, el alumnado realiza actividades como, por ejemplo, diseñar e implementar de estrategias para encontrar soluciones matemáticas; utilizar herramientas matemáticas, incluida las tecnológicas, que ayuden a encontrar soluciones exactas o aproximadas; aplicar datos, reglas, algoritmos y constructos matemáticos en la búsqueda de soluciones; manipular de números, datos e información gráfica y estadística, expresiones algebraicas y ecuaciones, y representaciones geométricas, entre otras.

El criterio de evaluación 1.1 se ocupa del manejo y reconocimiento de las estrategias para resolver problemas y se debe aplicar analizando la coherencia del razonamiento matemático del alumnado combinado con el uso de las herramientas tecnológicas como las calculadoras o aplicaciones informáticas. En este razonamiento matemático, se deben aplicar los conocimientos previos, los resultados y teoremas adquiridos, así como sus propias conjeturas. Para evaluar adecuadamente este criterio, es indispensable que las situaciones y problemas sean variados, lo más contextualizados posible y con múltiples caminos para su resolución.

El criterio de evaluación 1.2 hace referencia a la obtención de la solución y está íntimamente ligado al criterio anterior. Implica que la solución obtenida responda a la pregunta que se ha planteado y que enriquezca su conocimiento. La explicación del proceso utilizando el lenguaje más adecuado, entra dentro de este criterio.</td></tr>
<tr><td>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I</td><td>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II</td></tr>
<tr><td>1.1. Emplear algunas estrategias y herramientas, incluidas las digitales, para resolver problemas de la vida cotidiana y de las Ciencias Sociales, valorando su eficiencia en cada caso.

1.2. Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de problemas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales, describiendo el procedimiento realizado.</td><td>1.1. Emplear diferentes estrategias y herramientas, incluidas las digitales que resuelvan problemas de la vida cotidiana y de las Ciencias Sociales, seleccionando la más adecuada según su eficiencia.

1.2. Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de problemas de la vida cotidiana y de las Ciencias Sociales, describiendo el procedimiento realizado.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CE.MCS.2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La resolución de problemas, es el proceso sobre el que se construye el conocimiento matemático y se desarrollan las competencias. Al igual que ocurre con la CE.MCS.1, la evaluación de la adquisición de esta segunda competencia, es clave para una buena evaluación formativa. Para ello, es imprescindible dejar tiempo al alumnado para dar por terminada una tarea. Este criterio, no debe referirse solamente a la solución o conclusión, sino al proceso seguido. Con el fin de evaluar este proceso, será imperativo facilitar espacios para la comunicación. En ocasiones, puede resultar relevante realizar una estimación de cuál o cuáles podrían ser las soluciones (o conclusiones o resultados de la exploración de una situación) antes de empezar el proceso de resolución.

Para evaluar la CE.MCS.2, se plantean dos criterios. En primer lugar, el uso del lenguaje científico y los diferentes tipos de representaciones que deben ser los adecuados en cada curso. En Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, aparece el término demostración, deberán ser capaces de discernir lo que es una mera comprobación de un resultado mucho más general. El segundo criterio trata sobre la idoneidad de la solución o la discusión y el alcance de las posibles soluciones, en este caso deberán estar argumentadas y bien clasificadas. Dependiendo del contexto del problema, puede ser necesaria una reflexión sobre cuestiones importantes como la igualdad de oportunidades o el consumo eficiente y responsable. Estos argumentos deben ser suficientemente maduros y estar respaldados por resultados matemáticos.</td></tr>
<tr><td>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I</td><td>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II</td></tr>
<tr><td>2.1. Comprobar la validez matemática de las posibles soluciones de un problema utilizando el razonamiento y la argumentación.

2.2. Seleccionar la solución más adecuada de un problema en función del contexto (de sostenibilidad, de consumo responsable, equidad...) usando el razonamiento y la argumentación.</td><td>2.1. Demostrar la validez matemática de las posibles soluciones de un problema utilizando el razonamiento y la argumentación.

2.2. Seleccionar la solución más adecuada de un problema en función del contexto (de sostenibilidad, de consumo responsable, equidad...) usando el razonamiento y la argumentación.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CE.MCS.3</th></tr>
<tr><td colspan="2">Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento y la argumentación, con apoyo de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para la evaluación del progreso de esta competencia se plantean dos criterios. El criterio 3.1 está enfocado a identificar el progreso del alumnado en la formulación de conjeturas y en la aplicación del razonamiento y argumentación para validarlas; y el criterio 3.2, el empleo de herramientas como materiales manipulativos, calculadoras, hojas de cálculo y software de geometría dinámica para la argumentación y justificación de conjeturas.</td></tr>
</table>

Se recomienda que la evaluación de los dos criterios se realice en un contexto de evaluación formativa aplicando estos criterios a partir de las situaciones de aprendizaje alrededor de los diferentes sentidos matemáticos en un ambiente de resolución de problemas. Es necesario que el alumnado se sienta en un ambiente propicio, de confianza, que facilite la espontaneidad e inspire seguridad. Una técnica de evaluación eficaz puede ser la observación de las actividades de los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas y su participación en las puestas en común de las actividades y el análisis de sus producciones.

La aplicación del criterio 3.1 aparece de manera natural en un ambiente de resolución de problemas. El profesorado debe plantear situaciones que permitan la formulación de conjeturas y comprobación de las mismas, bien mostrando una situación que obligue a reflexionar sobre la misma y a descubrir relaciones y patrones o bien tratando de generalizar un problema ya resuelto. El proceso debe ser planificado por el profesorado que puede ejercer de guía puntual. No obstante, es cuestión de identificar el progreso del alumnado en este aspecto, dejando tiempo para que las conjeturas sean formuladas por él y no por el profesorado, ganando poco a poco una mayor autonomía. Cuando se evalúa la argumentación, dependiendo de la situación, será importante tener en cuenta no sólo la expresión verbal, sino la coherencia de esta, la progresiva identificación de las relaciones lógicas entre enunciados y el uso de materiales manipulativos, dibujos concretos, gráficos con mayor o menor grado de abstracción.

La aplicación del criterio 3.2. incide en que algunas conjeturas se pueden examinar fácilmente mediante el uso de herramientas tecnológicas. La disponibilidad de tecnología permite al alumnado lidiar con problemas complejos puesto que nos permite recopilar y analizar datos que, en el pasado, podrían haber sido considerados demasiado difíciles. Las calculadoras gráficas o determinados programas de software permiten a los estudiantes moverse entre diferentes representaciones de datos y calcular y utilizar números grandes o pequeños con relativa facilidad, en contextos de los sentidos numéricos, de medida, algebraicos y estocásticos. En el caso del sentido espacial, un software de geometría interactivo, como el Geogebra, permite establecer conjeturas en un contexto geométrico e indagar sobre su validez analizando casos de manera sistemática.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*
3.1. Adquirir nuevo conocimiento matemático mediante la formulación de conjeturas y problemas de forma guiada. 3.2. Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la formulación o investigación de conjeturas o problemas.	3.1. Adquirir nuevo conocimiento matemático mediante la formulación, razonamiento y justificación de conjeturas y problemas de forma autónoma. 3.2. Integrar el uso de herramientas tecnológicas en la formulación o investigación de conjeturas y problemas.

CE.MCS.4

Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de las ciencias sociales.

El pensamiento computacional es una forma de razonar en matemáticas que va siempre acompañada de otra competencia y proceso imprescindible para el aprendizaje de matemáticas como es la resolución de problemas. Ambos comparten que hay que trabajar con datos y que a veces hay que descomponer la situación a resolver en partes más simples, buscar relaciones entre ellas, conjeturar, modelizar y generalizar. Además, el alumnado vive inmerso hoy en un mundo tecnológico y es deseable que aprenda a razonar haciendo uso de la tecnología que les rodea. Para evaluar el desarrollo de esta competencia se tiene en primer curso el criterio 4.1 que tendrá en cuenta si el alumnado interpreta en el contexto del problema la solución obtenida mediante algoritmos o programas específicos (por ejemplo: una interpretación razonada de un problema de correlación de variables en base a los resultados gráficos, o extraer conclusiones sobre una gráfica que modela una situación concreta en el campo de las ciencias sociales como puede ser el crecimiento de una población, o situaciones relacionadas con la economía). En segundo curso, se tendrá en cuenta además, si el alumnado ha desarrollado estrategias suficientes para, además de lo anterior, ser capaz de realizar modelos propios como, por ejemplo, ser autónomo para sistematizar un proceso de resolución llegando a la generalización del proceso al encontrar la potencia n-ésima de una matriz sencilla, usar los medios tecnológicos como recurso habitual en su quehacer, generando situaciones diversas que le permitan estudiar la búsqueda de la solución desde diferentes perspectivas.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*
4.1. Interpretar, modelizar y resolver situaciones problematizadas de la vida cotidiana y de las Ciencias Sociales, utilizando el pensamiento computacional, modificando o creando algoritmos.	4.1. Interpretar, modelizar y resolver situaciones problematizadas de la vida cotidiana y las Ciencias Sociales utilizando el pensamiento computacional, modificando, creando y generalizando algoritmos.

CE.MCS.5

Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.

Las matemáticas son un cuerpo interconectado de sentidos y saberes. Conectar los diferentes objetos matemáticos entre sí es imprescindible para avanzar en el desarrollo del pensamiento y razonamiento matemático. Es necesario, por tanto, planificar tareas específicas para hacer explícitas estas conexiones, es decir, tareas ricas que no estén exclusivamente dedicadas al desarrollode un único concepto y/o procedimiento. En su trabajo en el aula, se recomienda incidir en las conexiones entre los conceptos y procedimientos que surgen en la resolución de estas tareas. Para evaluar el desarrollo de esta competencia se plantean esencialmente dos criterios de evaluación, que se diferencian en relación a los cursos básicamente en el manejo de unos saberes matemáticos u otros.

El primero de ellos (criterio 5.1) está enfocado al reconocimiento de relaciones entre los saberes matemáticos del curso actual y los de cursos anteriores acabando así de cohesionar los saberes matemáticos afianzándose como base para seguir aprendiendo. El segundo (criterio 5.2) tiene como objetivo evaluar si el alumnado es capaz de además de realizar estas conexiones entre diferentes procesos matemáticos, usarlas aplicando conocimientos y experiencias para llegar a la solución, y si además es capaz de explicitar estas conexiones que realiza, bien con lenguaje verbal, gráfico o simbólico.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*
5.1. Manifestar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas. 5.2. Resolver problemas estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas.	5.1. Manifestar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas. 5.2. Resolver problemas estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas

CE.MCS.6

Descubrir los vínculos de las matemáticas con otras materias y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.

Para evaluar el desarrollo de esta competencia se plantean esencialmente dos criterios de evaluación con el mismo propósito en los dos cursos, siendo la diferencia entre ambos los contenidos y saberes propios de cada nivel.

Al tratar de descubrir vínculos matemáticos con otras materias es necesario trabajar con situaciones contextualizadas en entornos relacionados especialmente en esa materia con las Ciencias Sociales para poder evaluar las conexiones que establece el alumnado entre la situación propuesta y la necesidad de objetos y elementos matemáticos para la búsqueda de la solución. Así, el primer criterio (6.1) que responde más al propio proceso matemático de resolución del ejercicio, mientras que el segundo criterio (6.2) evalúa si el alumnado es consciente de la aportación matemática como herramienta indispensable para avanzar en el desarrollo de la ciencia, están estrechamente vinculados. Por ejemplo, en el contexto de funciones, conviene plantear situación de variación en las que como herramienta deba usarse la derivada, en lugar de plantear solo cálculos procedimentales de derivadas de funciones, o en el caso de programación lineal proponer situaciones contextualizadas frente a resolución de regiones factibles sin contexto, o relacionado con el sentido estocástico proponer situaciones(por ejemplo a través de datos tomados de los medios de comunicación) en las que haya que comparar parámetros estadísticos o realizar inferencias para poder establecer una decisión en una población.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*
6.1. Resolver problemas en situaciones diversas utilizando procesos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real, otras materias y las Matemáticas.	6.1. Resolver problemas en situaciones diversas utilizando procesos matemáticos, reflexionando, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real, otras materias y las Matemáticas.
6.2. Analizar la aportación de las Matemáticas al progreso de la humanidad reflexionando sobre su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas y a los retos en las Ciencias Sociales que se plantean.	6.2. Analizar la aportación de las Matemáticas al progreso de la humanidad valorando su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas y a los retos que se plantean en las Ciencias Sociales.

CE.MCS.7

Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.

Esta competencia se evalúa mediante dos criterios. El criterio 7.2 se centra en cómo el alumnado comunica sus resultados, es decir, qué gráfico, lenguaje simbólico, tabla, elemento informático, infografía… elige para expresar sus conclusiones ante la resolución de una situación matemática, mientras que el criterio 7.1 se centra en el proceso de resolución mismo y en cómo distintas representaciones se articulan para mostrar distintas propiedades de un mismo objeto.

Se trata de evaluar que el alumnado no solo utilice diversas estrategias para resolver una situación e investigue diversos caminos, articulando distintas representaciones del mismo objeto matemático (criterio 7.1), sino también que comunique de forma coherente la conclusión del trabajo realizado usando la representación más adecuada en cada caso: diagrama de árbol, función, matriz, intervalo, gráfico, ecuación, expresión simbólica… o una combinación de los mismos (criterio 7.2).

Por ejemplo, al trabajar con asíntotas pueden realizarse sólo cálculos numéricos o bien acompañar la resolución de interpretaciones gráficas aproximadas y /o tabulares que apoyen y visualicen el resultado numérico obtenido. En el campo estadístico al trabajar la correlación entre dos variables pueden comunicarse los resultados apoyados en gráficas realizadas con herramientas informáticas que visualicen los cálculos numéricos y que sirvan para argumentar las conclusiones hechas mediante lenguaje verbal.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*
7.1 Representar ideas matemáticas, estructurando diferentes razonamientos matemáticos y seleccionando las tecnologías más adecuadas para la resolución de problemas.	7.1. Representar y visualizar ideas matemáticas estructurando diferentes procesos matemáticos y seleccionando las tecnologías más adecuadas para la resolución de problemas.
7.2 Seleccionar y utilizar diversas formas de representación, valorando su utilidad para compartir información.	7.2. Seleccionar y utilizar diversas formas de representación valorando su utilidad para compartir información.

CE.MCS.8

Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

El hecho de comunicar las ideas matemáticas que surgen durante el proceso de resolución en una situación matemática es un aspecto que requiere de una gestión muy dinámica del aula por parte del profesorado, haciendo preguntas abiertas que favorezcan que el alumnado reflexione (¿por qué has elegido hacer esto? ¿qué pasaría si…? ¿te recuerda a algo que hayas visto anteriormente? ¿en qué se parece o diferencia con…?) y favoreciendo también que sean los propios estudiantes los que se convenzan unos a otros de la validez o no de sus respuestas. Todo ello revierte en que el profesorado puede extraer de ese diálogo de aula los posibles errores cognitivos que tiene el alumnado para poder reconducirlo y, por otro lado, el alumnado ha de esforzarse en conectar su lenguaje verbal con su razonamiento matemático y con las diferentes representaciones que haya usado para su razonamiento (numéricas, gráficas o simbólicas, herramientas informáticas…) para así conseguir ser comprendido por el resto de los estudiantes y por el docente o la docente.

Para evaluar esta competencia se distinguen dos criterios: el criterio 8.1 cuyo foco está centrado en cómo el alumnado transmite, emite, argumenta y convence de forma ordenada y con el rigor apropiado un concepto, de forma que se aprecie en dicha comunicación la imagen y representación interna que tiene del mismo, y el criterio 8.2 que se focaliza en el reconocimiento que hace el alumnado de diferentes representaciones, modelos y caminos matemáticos para investigar y resolver una situación, así como en los argumentos que utiliza para decidirse por el más adecuado o para rechazar aquel que no conviene.

Por ejemplo, en un ejercicio de optimización, el criterio 8.2 valoraría si el alumnado reconoce que necesita como objetos matemáticos, entre otros, una determinada función en la que ha de averiguar si existe un máximo o un mínimo, unas reglas de derivación, resolver una ecuación y averiguar si el valor calculado es el máximo o el mínimo de la función, (es decir, valorar si el alumnado es capaz de entender y expresar con lenguaje matemático adecuado las reglas de cálculo para resolver un problema de optimización) mientras que el criterio 8.1 se centraría en si el alumnado, por ejemplo, argumenta de forma organizada y ordenada la elección de las variables que usa, de sus restricciones y de la función, si utiliza diferentes tipos de representaciones (verbal, simbólica o algún esquema gráfico) para ello, indicando el intervalo de existencia del valor que busca, si argumenta una vez calculado el valor la validez o no de la solución y del modelo utilizado como función, y si ello lo transmite con rigor científico y el uso de un vocabulario y notaciones matemáticas adecuadas.

La diferencia por cursos en la evaluación de esta competencia estriba en los propios saberes específicos de cada uno de ellos, si bien en el segundo curso ha de tenerse en cuenta en la argumentación del alumnado una mayor seguridad y rigor, valorando que ya han sido interiorizados conceptos que en primero han resultado novedosos e incorporados a sus nuevas argumentaciones.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*
8.1. Mostrar organización al comunicar las ideas matemáticas empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados. 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.	8.1. Mostrar organización al comunicar las ideas matemáticas empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados. 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.

CE.MCS.9

Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas.

La competencia CE.MCS.9 se enfoca en la dimensión socioafectiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de manera combinada ya que el dominio afectivo del alumnado se desarrolla en un contexto social. Para la evaluación de esta competencia se plantean tres criterios. La aplicación del criterio 9.1 trata de evaluar el progreso del alumnado en la identificación y regulación de sus emociones, especialmente, ante el proceso de resolución de problemas, pero en cualquier otra situación relacionada con las matemáticas. Esta regulación contribuirá a desarrollar los sistemas de creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y sobre el autoconcepto matemático del propio estudiante, esto es, las creencias acerca de sí mismo como aprendiz de matemáticas. El criterio 9.2 se centra en el progreso en las actitudes del alumnado hacia las matemáticas y hacia el aprendizaje de estas. En cuanto al desarrollo de actitudes, conviene tener en cuenta que se trata de un proceso complejo y que se extiende en el tiempo. Así como las emociones son afectos inestables e inmediatos (que se ven favorecidas por la actitud y las creencias), la formación de las actitudes y las creencias implica un trabajo continuo en lo emocional. Por ejemplo, si el alumnado experimenta sensaciones positivas en la resolución de problemas de forma continuada y aprende a asumir los bloqueos y a tomar la iniciativa en su superación, las actitudes que termina desarrollando son la de perseverancia, indagación, etc. El criterio 9.3. atiende a las interacciones en el plano social donde la formación de los pequeños grupos de trabajo en el aula es un aspecto clave a tener en cuenta para generar una cultura de aula inclusiva. Así, en la formación de los grupos, se debe tratar que éstos sean heterogéneos, puesto que, cuando se divide al alumnado en grupos homogéneos, se constata que esto frena el aprendizaje de aquellos con un ritmo más lento y, en cambio, no supone mejora para los que tienen un ritmo mayor. Por otro lado, cuando la formación de pequeños grupos de trabajo se deja al arbitrio del alumnado, lo único que se consigue es reproducir el statu quo de las agrupaciones que tienen lugar fuera del aula. Por estas razones, la formación de grupos visiblemente aleatorios de trabajo, con una alta movilidad, una vez se vence la resistencia inicial del alumnado, desemboca en un clima de trabajo participativo e inclusivo. La relación de lo socioafectivo con lo cognitivo es clara, y un adecuado tratamiento exige la creación de un clima afectivo de seguridad en el aula y que fomente la interacción tanto en pequeño como gran grupo donde la resolución de problemas en matemáticas forme parte activa de la construcción de conocimiento.

Estos criterios ponen de manifiesto, más que nunca, el carácter formativo de la evaluación. Se trata de que la evaluación del dominio socioafectivo permita que el alumnado reciba información sobre cómo desarrollar afectos positivos hacia las matemáticas y apreciar que los bloqueos y desesperaciones forman parte natural de la resolución de problemas, así como a mantener una actitud proactiva ante nuevos retos matemáticos que proporcione indicaciones con el propósito que desarrolle la competencia en relación con los diferentes saberes que se ponen en juego en las situaciones de aprendizaje. También esta evaluación formativa brindará información al profesorado, con el objetivo de adaptar las secuencias didácticas y alinear los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Para la aplicación del criterio 9.1 se pueden emplear instrumentos específicos, como el mapa de humor de los problemas (Gómez-Chacón, 2000a, 2000b), de manera que el alumnado exprese con un pictograma su estado emocional. Esto permite que el alumnado tome conciencia de sí mismo como resolutor de problemas, al mismo tiempo que se recogen evidencias de aprendizaje que pueden resultar de utilidad para organizar charlas de aula y adaptar las secuencias de enseñanza y aprendizaje. En un ambiente de resolución de problemas, donde prima la interacción, se pueden emplear listas de observación para evaluar el criterio 9.2, que resulten manejables en el entorno de aula, donde se recojan, entre otros aspectos, la perseverancia en la resolución de problemas, la aceptación del error, la capacidad de comunicar los procesos seguidos, la confianza en sus capacidades, etc. Para la aplicación del criterio 9.3., será conveniente la utilización de listas de observación en las que se recoja, entre otros aspectos, la aceptación de puntos de vista ajenos, el grado y forma de participación e iniciativa del alumnado o el nivel de compresión de los conceptos y la comunicación de estos en relación con las tareas.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*
9.1. Afrontar las situaciones de incertidumbre, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas. 9.3. Participar en tareas matemáticas de forma activa en equipos heterogéneos, respetando las emociones y experiencias de los demás, escuchando su razonamiento, identificando las habilidades sociales más propicias y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables.	9.1. Afrontar las situaciones de incertidumbre y tomar decisiones evaluando distintas opciones, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas. 9.2. Mostrar perseverancia y una motivación positiva, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas. 9.3. Trabajar en tareas matemáticas de forma activa en equipos heterogéneos, respetando las emociones y experiencias de los demás, escuchando su razonamiento, aplicando las habilidades sociales más propicias y fomentando el bienestar del equipo y las relaciones saludables.

III. Saberes básicos

III.1. Descripción de los diferentes bloques en los que se estructuran los saberes básicos

A. Sentido numérico

El sentido numérico, según Sowder (1992, p.381) es “una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones y sus propiedades, y resolver los problemas numéricos de una forma creativa y flexible”. Por tanto, el sentido numérico no se reduce a aprender a reproducir los algoritmos tradicionales de cálculo, sino que debe orientarse al desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números, de objetos matemáticos formados por números y de las operaciones.

Así, las principales capacidades que caracterizan el sentido numérico son variadas. En primer lugar, está la capacidad de reconocer cómo y cuándo usar los números, para la cual es necesario comprender cómo están organizados los distintos sistemas de numeración y las relaciones entre los distintos conjuntos numéricos, así como su representación. Seguidamente, es importante reconocer o estimar el tamaño absoluto de un número, cantidad o medida y su tamaño relativo respecto a otro para poder realizar comparaciones. De este modo, se utilizan puntos de referencia para poder realizar estimaciones, comparaciones y cálculos. Este sentido también conlleva la habilidad para componer y descomponer los números con el objetivo de efectuar operaciones con fluidez y el uso de diferentes representaciones (gráficas, manipulativas o pictóricas) para resolver problemas de forma eficaz. Para ello, es necesario comprender el significado de las operaciones y su efecto en el resultado obtenido. Por último, en este sentido también encontramos la capacidad para desarrollar estrategias adecuadas en función de la tarea a realizar y de evaluar si los datos numéricos presentes en el problema o su resultado son razonables (Arce, Conejo y Muñoz, 2019).

A lo largo de esta etapa, se debe experimentar con otros conjuntos en los que aparecen números con propiedades y patrones nuevos, utilizando, por ejemplo, un software de geometría dinámica como es el Geogebra y que mejorará la comprensión de las operaciones en estos sistemas numéricos que son nuevos para ellos como las matrices. El sentido algebraico y computacional está vinculado al sentido numérico en la resolución de sistemas de ecuaciones. Al representar los sistemas de ecuaciones usando matrices se debe reconocer cómo las operaciones en las matrices corresponden a manipulaciones de tales sistemas.

La resolución de problemas y la práctica de la técnica formal, deben desarrollarse en paralelo. En lo referente a los problemas, se trata de situaciones que el alumnado tiene que resolver de manera autónoma, buscando sus propias estrategias. Por otro lado, es importante que el alumnado sea capaz de decidir qué herramientas utilizar para realizar cálculos con fluidez utilizando la tecnología cuando sea necesario.

La construcción del significado va ligada siempre a la vía de la resolución de problemas. La definición de lo que es un problema en matemáticas es compleja y admite matices, pero siempre es algo mucho más que un ejercicio con contexto. Siguiendo a Blanco y Pino (en Blanco, et al., 2015), se pueden destacar los siguientes aspectos para que una actividad pueda ser considerada como problema: la necesidad de tener un objetivo al que no podemos llegar fácilmente con un proceso inmediato; las dudas y/o bloqueos generados por la situación planteada o por el desconocimiento de ese método claro que nos lleve a la solución; el aceptar el reto consciente para llegar a él lo que puede ser considerado por el resolutor como un desafío personal y uso de conceptos y procesos matemáticos. El alumnado debe ser consciente, al resolver problemas, de que suele haber diferentes maneras de resolverlo, de que se puede llegar al mismo resultado por caminos diferentes, de que puede haber diferentes soluciones a un problema, no existir solución, o que esta no sea numérica.

B. Sentido de la medida

El sentido de la medida nos permite comprender y comparar atributos o cualidades del mundo que nos rodea, por lo que forma parte de nuestra vida social, profesional y personal. Este sentido se caracteriza por la capacidad de contabilizar y estimar una cantidad de magnitud.

En la etapa de educación secundaria obligatoria se ampliaron las experiencias de medición directa de áreas y volúmenes para profundizar su comprensión del área de figuras bidimensionales y del área y el volumen de objetos tridimensionales. Los instrumentos de medida y las fórmulas de medición indirecta constituyeron la piedra angular sobre la que se apoyó el desarrollo del sentido de la medida en esa etapa.

En este Bachillerato, se profundiza en el camino iniciado en ese último curso dentro de una matemática ya más avanzada, focalizándose en saberes agrupados en torno a la medición y el cambio. Así, se introducen objetos matemáticos nuevos y que son elementos básicos del cálculo o análisis matemático, como la integral definida, para medir áreas y volúmenes, y el límite y la derivada para estudiar cambios en diferentes contextos. También se profundiza en el estudio de otros saberes ya conocidos como la continuidad de una función.

Por tanto, el sentido de la medida se puede desarrollar en relación con otros saberes matemáticos en vez de hacerlo de forma aislada puesto que muchos contenidos están relacionados con los que los estudiantes aprenden en geometría, en análisis o en probabilidad. También el sentido de la medida ofrece la oportunidad de aprender y aplicar otros saberes matemáticos: operaciones numéricas, ideas geométricas, relaciones, conceptos estadísticos y funciones.

Las conexiones del sentido de la medida con otras materias son múltiples y variadas. Se vincula naturalmente con muchas otras partes del currículo a través de estudios sociales, científicos, artísticos o de educación física. Hemos de tener en cuenta que el papel de la medida en matemáticas presenta matices que hay que considerar y que son extensibles a cualquier proceso de modelización. Por último, no podemos perder de vista que la medida juega un papel fundamental en el progreso científico-tecnológico actual y en la evolución de la humanidad, en particular, con su papel en las ramas de ciencias sociales y jurídicas.

C. Sentido algebraico

Desarrollar el sentido algebraico en bachillerato tiene valor en sí mismo ya que proporciona el lenguaje en el que se comunican las matemáticas. Este lenguaje no es solo la resolución de ecuaciones y la manipulación aséptica de expresiones algebraicas, es mucho más. Aunque la descripción acerca de qué se considera pensamiento algebraico es compleja, hay dos características importantes que lo definen, como son: ver lo general en lo particular y también ver lo particular desde lo general a través de reconocimiento de patrones y relaciones de dependencia de entre variables por medio de diferentes representaciones y modelizar situaciones matemáticas del mundo real con expresiones simbólicas.

La etapa de bachillerato de CCSS es el inicio hacia el desarrollo de una matemática más avanzada que la trabajada en la etapa de Educación Secundaria, en la que el aspecto de la modelización y su interpretación razonable va a cobrar una relevancia especial en torno a situaciones reales que tengan que ver con contextos de Ciencias Sociales, así cómo adquirir habilidades para definir con lenguaje simbólico, demostrar –entendiendo la demostración como aquel argumento que nos convence sobre la validez acerca de algún resultado o propiedad y que es también capaz de convencer a otros, y formalizar diferentes aspectos en el desarrollo de las tareas. El pensamiento algebraico va estrechamente acompañado así del pensamiento relacional definido como una disposición del individuo para usar, explicar y conectar distintas propiedades en su pensamiento matemático, y del pensamiento funcional puesto que va a construir, describir y razonar con funciones en muchos momentos.

Por lo tanto, desarrollar el sentido algebraico debe suponer seguir contribuyendo a desarrollar un cambio en el pensamiento del alumnado que le permita a través de esas diferentes conexiones entre diversos sistemas de representación y de ese lenguaje propio del álgebra disponer de una herramienta potente para poder entender, comprender y modelar situaciones que se presentan en el mundo de las Ciencias Sociales y extraer conclusiones razonables.

Es importante atender en esta etapa al concepto de variable y de relación entre variables, y al uso de diferentes sistemas de representación (ecuaciones y funciones) para poder elegir el más adecuado a un contexto, y que éste sea lo más cercano y real posible dentro del campo de las Ciencias Sociales, planteando situaciones cercanas a la economía, a la logística…. El concepto de variable (ya complejo en sí mismo) no resulta siempre fácil al alumnado; para facilitar esa comprensión hemos de aprovechar la facilidad que nos proporcionan las herramientas informáticas que hoy en día debido al gran avance de las mismas son muchas, y proporcionan métodos más accesibles para la resolución de problemas, y manipulaciones simbólicas complejas de forma rápida y fiable y proporcionan también el avance en el desarrollo del sentido computacional.

El álgebra ha de ser tratado como un saber o sentido en continua relación con el resto de los sentidos matemáticos en esta etapa y no como algo independiente, sino como un componente con sentido transversal que nos proporciona un lenguaje universal para interpretar y comunicar resultados.

D. Sentido estocástico

El desarrollo del sentido estocástico está asociado a la alfabetización estadística y probabilística. La primera alude a la capacidad para interpretar datos, evaluarlos críticamente, realizar juicios y valoraciones para expresar opiniones respecto a información estadística, argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos. La segunda se relaciona con la capacidad para acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente diversas situaciones de incertidumbre y riesgo del mundo real, ya sea en la vida cotidiana, política o en contextos científico tecnológicos.

El sentido estocástico, tanto desde la estadística como desde la probabilidad, tiene como elemento importante y distinto de otros ámbitos de la matemática el trabajar con la variabilidad de las situaciones frente al determinismo, por lo que cobra especial importancia y es un sentido clave para crear una ciudadanía informada con suficientes conocimientos y competencias para que ante fenómenos aleatorios y tratamiento e interpretación de datos e informaciones sean personas difícilmente manipulables y sean capaces de tomar decisiones y formarse opiniones de forma crítica y razonable.

Varios autores señalan la importancia de desarrollar los siguientes aspectos para crear una ciudadanía con un sentido estocástico que permita tomar decisiones en situaciones de incertidumbre: reconocer la necesidad de los datos para analizarlos y para evitar realizar juicios sin argumentación que pueden llevar a la confusión de ideas, el poder manejar esos datos utilizando diferentes representaciones (tablas, gráficos, estadísticos) , percibir la idea de variable aleatoria como algo intrínseco a la estadística y reconocer los elementos que pueden influir en esa variación y aceptar que a veces esas variaciones no quedan explicadas, buscar, estudiar e investigar modelos que se ajusten a las distribuciones de datos y que permitan realizar inferencias y predicciones y controlar el error al realizarlas. Muchas de las ramas asociadas a las Ciencias Sociales relacionadas con la economía, la pedagogía, psicología, demografía …trabaja a partir de colecciones grandes de datos para hacer predicciones y explicar situaciones, por lo que desarrollar el sentido estocástico en esta opción de las matemáticas es altamente recomendable.

De los diferentes enfoques de la probabilidad (intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo y axiomático) se cuenta con completar los trabajados en Educación Secundaria trabajando de forma más intensa en esta etapa con el subjetivo y también axiomático como medida de la incertidumbre, desarrollando entonces de forma simultánea el sentido de la medida junto con el estocástico.

Para ello, las actividades conviene que sean abiertas, que requieran de una búsqueda de datos, de interpelar sobre los resultados, de conectar los resultados recogidos con los modelos teóricos que los pueden explicar, cambiando tamaños de las muestras, dialogando sobre los cambios producidos e interpretando los parámetros de la distribución.

Tanto para los aspectos estadísticos como probabilísticos, las tecnologías de la información y la comunicación resultan fundamentales, tanto mediante la utilización de programas software específicos (hoja de cálculo) como con applets que pueden encontrarse en internet, de forma que podamos centrar más el esfuerzo en la comprensión que en cálculo repetitivo de probabilidades o coeficientes de correlación y también como fuente de páginas web que se dedican al tratamiento de datos , que proporcionan datos y gráficos actualizados, de temas de actualidad y que son un buen repositorio al que acudir para realizar actividades en aula.

E. Sentido socioafectivo

La influencia del dominio socioafectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha dado lugar a una intensa línea de investigación en educación matemática. Gomez-Chacon (2000b) recoge que esto es debido al fuerte impacto que tiene en cómo el alumnado aprende y emplea las matemáticas; a la influencia de los afectos en el autoconcepto como estudiante de matemáticas; a las interacciones entre dominio afectivo y cognición; a la influencia en cómo se estructura la realidad social de la clase; y a que puede constituir un obstáculo para el aprendizaje significativo.

Es clásica la categorización del dominio afectivo en creencias, actitudes y emociones (McLeod, 1992), tres componentes interrelacionados que se diferencian principalmente en términos de intensidad y estabilidad. Las creencias pueden definirse como las ideas que un individuo va conformando acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje a partir de las experiencias vividas (Blanco, 2012; Gil, Blanco y Guerrero, 2005). Son bastante estables y difíciles de cambiar, ya que se forman a lo largo de los años. En secundaria, las investigaciones señalan que son comunes entre los estudiantes algunas creencias hacia las matemáticas como disciplina (por ejemplo, las matemáticas son algo exacto y estático y tienen un carácter procedimental y algorítmico), algunas creencias sobre sí mismos como aprendices (por ejemplo, un bajo autoconcepto como aprendiz de matemáticas genera inseguridad y ansiedad ante una tarea, así como la atribución de fracasos a una supuesta baja capacidad y los éxitos a causas externas, como la suerte o la facilidad de la tarea), ciertas creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje (por ejemplo, el profesorado debe presentar los hechos, reglas y procedimientos para aplicar en las actividades y el aprendizaje se basa en la memorización de estos hechos y procedimientos y la repetición rutinaria de actividades prototípicas) y creencias suscitadas por el entorno social y familiar hacia las matemáticas (por ejemplo, que el desarrollo de la habilidad matemática está ligado a tener un talento innato o capacidades especiales que no tiene todo el mundo, lo que genera cierta disculpa ante la falta de competencia matemática).

Las actitudes son predisposiciones positivas o negativas que condicionan a un sujeto a percibir y reaccionar de un modo determinado ante los objetos y las situaciones con las que se relacionan (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004). Se distinguen entre actitudes matemáticas, ligadas al modo en que se utilizan las capacidades cognitivas en la resolución de tareas matemáticas, como la flexibilidad de pensamiento o el espíritu crítico, y actitudes hacia las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, bien a través del gusto, la satisfacción, el interés o la curiosidad hacia estas o bien, el rechazo, la frustración o su evitación en el itinerario escolar.

Las actitudes y creencias del alumnado hacia las matemáticas se relacionan con los estados emocionales que afloran en la resolución de problemas y les predispone a actuar de cierta manera. Las emociones son estados afectivos de alta intensidad, como las situaciones de bloqueo y desbloqueo durante la resolución de un problema o los sentimientos de satisfacción, disfrute, miedo o pánico durante ese proceso. Así, si un alumno o una alumna poseen una creencia negativa sobre las matemáticas o sobre su enseñanza, tenderá a mostrar sentimientos adversos hacia las tareas relacionadas con dicha materia, lo que le llevará a conductas de evitación o de rechazo de las mismas (Blanco, 2012). La ansiedad matemática es entendida como un sentimiento de tensión, miedo o aprehensión que surge al enfrentarse a las matemáticas y al trabajo matemático y varía su consideración entre una actitud y una emoción.

Además, otros autores (DeBellis y Goldin, 2006; Beltrán-Pellicer y Godino, 2020) incluyen también los valores para referirse a compromisos profundos por parte de los individuos, que pueden organizarse en sistemas muy estructurados, y que ayudan a establecer prioridades a corto plazo y tomar decisiones. Finalmente, otros autores se centran en aspectos como el interés y la motivación (Attard, 2014). Sin embargo, estos últimos pueden explicarse en función de los componentes anteriormente mencionados y no constituyen la esencia del dominio afectivo.

Numerosas investigaciones han constatado que no hay diferencia en el desempeño de alumnos y alumnas en matemáticas. Cuando las hay, son mínimas y restringidas prácticamente al ámbito de la visualización y orientación espacial. Estas, además, pueden explicarse en términos de condicionantes sociales, como los juegos y los deportes que desarrollan en su tiempo de ocio. Sin embargo, sí que hay diferencias importantes en torno al autoconcepto y la confianza en uno mismo entre alumnas y alumnos, que se traducen en la creación y mantenimiento de estereotipos de género (como el mito de que a los alumnos se les dan mejor las matemáticas que a las alumnas). El profesorado debe ser consciente de que muchas veces se produce una diferenciación por género de manera implícita, sin apenas ser consciente de ello (p. ej, la forma de plantear las clases). Es importante considerar la perspectiva de género, ya que los estereotipos se traducen más adelante en una menor participación de la mujer en ámbitos relacionados con las matemáticas y las disciplinas STEM, en general (Kaiser, et al., en Forgasz y Rivera, 2012; Macho Stadler, et al., 2020).

Por lo tanto, es fundamental que el profesorado despliegue estrategias para reforzar el autoconcepto de todo el alumnado, atendiendo no solo a la perspectiva de género sino a cualesquiera otras perspectivas de ámbito étnico y sociocultural. Es importante reforzar creencias positivas en el alumnado acerca de sus propias capacidades, evitando, por ejemplo, relacionar sus éxitos con la suerte.

La principal propuesta de actuación es desde el enfoque didáctico (Boaler y Sengupta-Irving, 2012; Macho Stadler, et al., 2020). Una concepción expositiva de las clases en la que el profesorado explica y el alumnado se limita a memorizar y a poner en práctica promueve un ambiente competitivo e individualista. Especialmente, si, como suele pasar en esos casos, la evaluación es básicamente sumativa. Este ambiente, entre otras cosas, ocasiona desigualdades por género y por contexto social, haciendo que muchos estudiantes rindan y se impliquen menos en su aprendizaje. Por el contrario, un enfoque abierto en el que se fomente la participación de todos los estudiantes en la resolución y puesta en común de las tareas, se trabaje en grupo, se discutan las ideas libremente y no se penalice el error, sino que se utilice como oportunidad de aprendizaje, donde la evaluación sea esencialmente formativa, etc. mejora el aprendizaje de todo el alumnado. Igualmente, hay que considerar que la elección de contextos para las situaciones de aprendizaje sea inclusiva y variada.

En esta etapa, el alumnado ha desarrollado ya ciertas actitudes y sistemas de creencias hacia las matemáticas y hacia lo que es aprender matemáticas. De esta manera, cuando el alumnado está acostumbrado a un enfoque expositivo y se pretende seguir un enfoque didáctico abierto a través de la resolución de problemas se produce un cambio en la cultura de aula que puede generar cierta resistencia. Esta resistencia está recogida en la literatura (Brown y Coles, 2013; Sullivan, et al., en Watson y Ohtani, 2015) y ante ella se trata de actuar de forma coherente e insistente con el enfoque didáctico objetivo.

Las secuencias didácticas deben considerar momentos en los que se puedan identificar las emociones que siente el alumnado al resolver problemas. Por ejemplo, es habitual sentirse bloqueado cuando estamos ante un problema de verdad y no un ejercicio. Sin embargo, no todas las personas reaccionan de la misma manera ante dichos bloqueos. Las charlas de aula y las interacciones en pequeño grupo, convenientemente orquestadas, permiten al alumnado poner en común lo que ha pasado durante el proceso de resolución de un problema. También existen herramientas específicas para ello, como el «mapa de humor de los problemas» (Gómez-Chacón, 2000a, 2000b), que proporcionan información tanto al propio alumno o la apropia alumna, como al docente o a la docente, de sus reacciones emocionales.

Por último, no hay que olvidar el papel de los referentes en el desarrollo cognitivo, afectivo y cultural. Los principales referentes del alumnado son personas de su entorno cotidiano (familia, compañeros y compañeras, y profesorado), es conveniente dar a conocer las matemáticas como una construcción humana y, en especial, la contribución de la mujer y diversas minorías, históricamente envuelta en dificultades. Una forma de hacer esto es abordar en clase la biografía de matemáticas y matemáticos de diferentes culturas, procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. Aunque esto último puede resultar complicado, cabe mencionar el legado de la aragonesa Andresa Casamayor, cuyo «Tyrocinio arithmetico» es el primer libro de ciencia escrito por una mujer en español que se conserva y que versa sobre operaciones básicas… Además de la biografía y logros de estos hombres y mujeres matemáticos, las programaciones didácticas pueden contemplar la realización de charlas y conferencias de hombres y mujeres matemáticos que relaten su experiencia.

III.2. Concreción de los saberes básicos

III.2.1. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

A. Sentido numérico	
El sentido numérico debe orientarse al desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números, de objetos matemáticos formados por números y de las operaciones. El objetivo de esta etapa es afianzar la utilización y comprensión del número, incluyendo técnicas de recuento, a la vez que se profundiza en la comprensión de información numérica presente en diversos contextos sociales. En este curso, el alumnado debería aprender las diferencias entre los conjuntos y qué propiedades se conservan y cuáles no al pasar de un conjunto a otro. También es objetivo de este curso el operar con fluidez números reales y resolver problemas, utilizando la tecnología cuando sea apropiado. Es importante que el alumnado sepa decidir razonadamente qué herramientas usar y cuándo usarlas para realizar cálculos con fluidez: saber elegir entre el cálculo mental, estrategias de lápiz y papel, la estimación y el uso de la calculadora. La resolución de problemas y la práctica de la técnica formal, deben desarrollarse en paralelo.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
A.1. Conteo:	En este curso se continúa con el trabajo desarrollado en la etapa de educación secundaria obligatoria donde el alumnado ha adquirido las principales técnicas de recuento: el principio multiplicativo, el principio aditivo, las combinaciones y las permutaciones y variaciones sencillas.

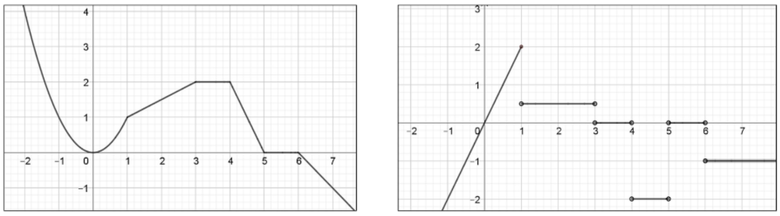
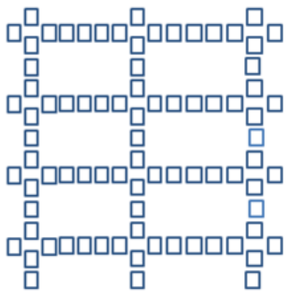
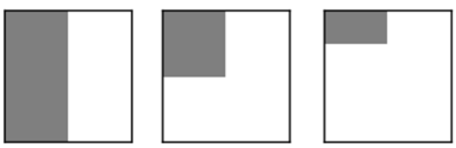
– Estrategias y técnicas de recuento sistemático (diagramas de árbol, técnicas de combinatoria.).	A lo largo de este curso se debe desarrollar la comprensión de las permutaciones, las combinaciones y las variaciones como técnicas de recuento. El uso de estos algoritmos permite economizar los procesos laboriosos de recuento. El uso de diagramas de árbol permite resolver problemas matemáticos de distintos campos que exigen un estudio de todas las posibilidades (Gairín y Sancho, 2002). El tipo de tareas planteadas en este bloque puede relacionarse con sentidos matemáticos puesto que los problemas de conteo pueden presentarse en contextos diversos y están vinculadas al sentido espacial o estocástico. En el bloque E.2. del sentido estocástico encontramos referencias a este bloque.
A.2. Cantidad: – Números reales (racionales e irracionales): comparación, ordenación, clasificación y contraste de sus propiedades.	Los números reales nos permiten integrar todos los conocimientos sobre los números irracionales y racionales (Moreno, 1998). Para trabajar los números reales, se ha de considerar los sistemas de representación numérico y geométrico. El sentido numérico abarca el sistema de notación decimal y notaciones auxiliares de carácter operatorio (bloque A.3.), y el geométrico se puede trabajar a través del modelo de la recta real. Comprender la recta real, precisa de un buen sentido numérico. Su organización ordenada, los subconjuntos que podemos describir en ella (discretos o continuos, acotados superior o inferiormente, abiertos o cerrados) y su densidad, son ideas fundamentales. El modelo geométrico muestra la relación de este sentido con el espacial. Por otro lado, es importante desarrollar una comprensión más profunda de los números muy grandes y de los muy pequeños, y de sus diversas maneras de representarlos. Aunque los cálculos que una persona corriente realiza supone el uso de números y magnitudes no muy grandes, al pensar en presupuestos de una ciudad, construcción, astronomía, medicina, gestión de residuos, etc.es importante comprender y manejar cantidades muy grandes o muy pequeñas. Para ello, Gairín y Sancho (2002, p.272) proponen 3 aspectos que favorecen dicha comprensión y manejo: Establecer puntos de referencia, reconocer el tamaño relativo de los números y comprobar sistemáticamente lo razonable de las informaciones numéricas. La comparación juega un papel fundamental en la comprensión de los números grandes y pequeños puesto que permite al resolutor de un problema comparar la situación a la que se enfrenta con una experiencia personal (Gairín y Sancho, 2002). Con el siguiente ejemplo se ilustra una tarea en la que intervienen números grandes: ¿Cuántas toneladas de basura se generan cada día en Zaragoza? ¿Y en España? ¿Y en el mundo? Calcula la altura que alcanzarían las basuras de una ciudad como Zaragoza si se fueran amontonando en unos terrenos de 10 ha que tiene el ayuntamiento. (Gairín y Sancho, 2002, p.273). Este ejemplo está sacado del libro de Gairín y Sancho (2002) y en él se pueden encontrar muchos más problemas.
A.3. Sentido de las operaciones: – Potencias, raíces y logaritmos: comprensión y utilización de sus relaciones para simplificar y resolver problemas.	Realizar operaciones inversas implica la necesidad del uso de radicales y logaritmos. La definición de ambos soportes, debe ayudar a reconocer expresiones equivalentes y a un buen manejo de este tipo de expresiones. No se debe caer en la realización de ejercicios muy repetitivos que no contribuyen a la comprensión de las definiciones y propiedades sino a una mecanización excesiva. Por ejemplo (https://nrich.maths.org/7039): Irene quiere definir 3^{3^3} como $(3^3)^3$pero Carlos cree que esa pila de potencias debería definirse como $3^{(3^3)}$. ¿Sus definiciones conducen al mismo valor numérico? ¿Ocurre lo mismo si se reemplaza el 3 por algún otro número? ¿Cómo se extenderían las definiciones de Irene y Carlos a la definición de $3^{3^{3^3}}$? ¿Sus definiciones conducen al mismo valor numérico? ¿Ocurre lo mismo si se reemplaza el 3 por algún otro número? Asimismo, en este bloque se trabajará el desarrollo de la fluidez en las operaciones con números reales, utilizando el cálculo mental o escrito y las herramientas tecnológicas adecuadas. El uso de la tecnología permite abordar problemas reales donde los cálculos que están involucrados son más complicados: calcular raíces, potencias de números o logaritmos. Una mayor comprensión de los números implica que el alumnado aprenda a considerar las operaciones de manera general y no sólo en cálculos particulares incidiendo en las propiedades de los números involucrados. Asimismo, el razonamiento es importante para juzgar la razonabilidad de los resultados obtenidos. El alumnado debe decidir si un problema requiere una estimación aproximada o una respuesta exacta así como la forma en la cual realizar los cálculos con fluidez. Se debe animar al alumnado a extraer sus propias conclusiones y justificarlas pensando en las propiedades de los números. En el campo de problemas de educación financiera encontramos situaciones que nos permiten dar sentido a estas operaciones. Asimismo, los problemas de crecimiento exponencial permiten trabajar los números grandes y las potencias. Este tipo de problemas permite reflexionar sobre la relación que existe entre el aumento de la población y su efecto sobre el consumo y los recursos de los que disponemos (Gairín y Sancho, 2002). Se debe afianzar la comprensión de los logaritmos y relacionar este contenido con las funciones logarítmicas que están presentes en el sentido algebraico.
A.4. Educación financiera: – Resolución de problemas relacionados con la educación financiera (cuotas, amortización,	Las operaciones con capitales financieros donde intervienen intereses bancarios y la capitalización y amortización simple y compuesta pueden realizarse mediante la utilización de recursos tecnológicos. El desarrollo del sentido numérico nos debe servir para enjuiciar lo razonable de los cálculos numéricos que se realizan y los resultados obtenidos. Los problemas que se plantean en este bloque deben ser situaciones cercanas al alumnado. Podemos proponer tareas de este estilo: ¿Durante

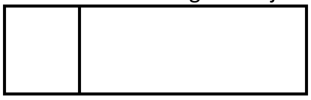
intereses, préstamos…) con herramientas tecnológicas.	cuánto tiempo abonaremos mensualidades de 150 € con un interés del 3% anual para conseguir capitalizar 10.500 €? o Emma quiere ver duplicado el capital que ha ingresado en un banco con un interés compuesto anual del 4 %, ¿cuánto tiempo tendrá que esperar?

B. Sentido de la medida

Los saberes correspondientes a este sentido durante este curso se organizan en torno a un bloque o idea relacionada con el sentido de la medida: el cambioy covariación entre dos magnitudes. En este bloque, aparecen el concepto de límite asociados a las ideas de aproximación y de tendencia (entendida como aproximación que mejora cualquier otra) y la continuidad y la derivada de una función en un punto, para estudiar cómo es la covariación entre dos magnitudes. Para ello, se apoyan en nociones ya presentadas en las asignaturas de 4º de ESO (como continuidad y discontinuidad de una gráfica, tasa de variación media y pendiente).

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
B.1. Cambio: – Límites: estimación y cálculo a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica. – Continuidad de funciones: aplicación de límites en el estudio de la continuidad. – Derivada de una función: definición a partir del estudio del cambio en contextos de las Ciencias Sociales.	Los saberes incluidos en este bloque tienen especial relación con los saberes del sentido algebraico, en especial del bloque D.4., por lo que se sugiere un tratamiento integrado de ambos bloques de saberes. La noción de infinito está muy relacionada con los saberes de este bloque. Las primeras aproximaciones de los estudiantes a esta noción suelen estar caracterizadas por la concepción de *infinito potencial*, que surge como posibilidad en procesos que podrían acabar si no tuviéramos una existencia finita, como, por ejemplo, contar números o dividir sucesivamente una cantidad por la mitad, ...frente a la concepción de *infinito actual* como atributo o cualidad que puede ser asignada a un objeto, como por ejemplo, un conjunto infinito. Muchas de las dificultades y errores que tienen los estudiantes al trabajar con este saber, como suponer que el todo es siempre mayor que las partes en un conjunto infinito; que el resultado de cualquier suma de infinitos términos positivos es infinito o que la definición acotada de cualquier intervalo suponga que tiene un número finito de puntos en él pueden estar asociados a que no son capaces de articular ambas concepciones. La enseñanza del límite de una función en Bachillerato se mueve entre la introducción del mismo desde un punto de vista dinámico hasta llegar a una definición rigurosa y estática del concepto, de tipo epsilon-delta, que es excesivamente formal para los estudiantes de 1º de Bachillerato. Comprender la definición dinámica es esencial para transitar a una definición estática para lo que es clave distinguir los términos aproximación y tendencia y evitar que se generen en el alumnado concepciones erróneas como la imposibilidad de alcanzar el valor de un límite, el límite como valor final o el límite como valor tope que no puede rebasarse. Para ello, se recomienda utilizar una gran variedad de funciones en cuanto a tipos y comportamientos (continuas, discontinuas, crecientes, decrecientes, oscilantes, con asíntotas...) y de representaciones (tabla numérica, gráfica y expresión algebraica) y plantear el límite de una función como *la aproximación óptima* (Blázquez y Ortega, 2002). En especial, las representaciones numéricas de las funciones facilitan relacionar las variables y la coordinación de las aproximaciones en ambos ejes. No se recomienda focalizar en exclusiva la docencia en este saber sobre aspectos únicamente procedimentales, con tareas centradas en la manipulación de expresiones algebraicas y simbólicas, como puede ser el caso del cálculo de indeterminaciones. El que este saber aparezca en el listado de manera previa a las ideas de continuidad y derivada de una función, no imposibilita que se planteen secuencias de enseñanza donde la presentación del límite de una función se integra dentro del estudio de la continuidad o de la derivabilidad de las funciones (Azcárate et al., 1996, Grupo Cero, 1982). La continuidad de una función ha sido presentada en cursos anteriores. Es habitual que el alumnado posea una concepción intuitiva y geométrica de la continuidad, basada en la idea de que una función es continua si se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel, más cercana a una concepción de la continuidad como una propiedad de carácter global de una función. En este curso, la continuidad como propiedad aparece ya como un marcado carácter local y se amplía en el registro algebráico-analítico empleando la noción de límite de una función en un punto. Es fundamental articular los registros anteriores asociados a la continuidad, numéricos y geométricos, con este nuevo registro algebraico para que el alumnado pueda generar una adecuada concepción de la continuidad. Así mismo, es conveniente que el estudio de la continuidad de las funciones se realice en situaciones reales que sean modelizadas por una función para integrar la continuidad como un elemento del sentido de la medida. La derivada también está estrechamente ligada a la idea de límite ya que la historia muestra que los fenómenos asociados al cálculo de derivadas (obtener tangentes, máximos y mínimos, etc.) fueron los que condujeron a la aparición del límite. Un primer acercamiento a la derivada puede realizarse a través del contexto físico de velocidad y tratar la pendiente de una recta, la velocidad media y la tasa de variación media (ya conocidos por el alumnado) hasta llegar a la velocidad instantánea, donde aparece la idea de proceso infinito y límite al calcular velocidades medias en intervalos (o, gráficamente, pendientes de rectas secantes) cada vez más pequeños (Azcárate et al., 1996). La recta tangente es un concepto ligado a la introducción de la derivada, hay que ser conscientes que las concepciones previas del alumnado sobre recta tangente suelen estar ligadas a la geometría sintética como recta que solo toca a la curva en un punto, mientras que la aproximación que se realiza ahora mediante la derivada la recta tangente aparece como límite de las rectas secantes a una curva. El empleo de software de representación de funciones como GeoGebra o Derive, mediante zooms, puede permitir articular las dos concepciones anteriores. Este tipo de software también puede permitir que el alumnado pueda visualizar la construcción de la función derivada de una función elemental dada, distinguiendo, de esta manera, la derivada en un punto y la función derivada (https://www.geogebra.org/m/BDYnGhbt).

<table>
<tr><td></td><td>Además de tareas donde se proporcione la expresión analítica de la función y se pide calcular su derivada o representarla gráficamente tras estudiar sus propiedades (como monotonía o extremos), se recomienda para desarrollar una comprensión más completa de este saber, incluir en las secuencias de enseñanza tareas con representaciones numéricas o gráficas (sin expresiones analíticas), o tareas en las que se necesite coordinar informaciones proporcionadas en diferentes contextos o representaciones. Por ejemplo, dadas gráficamente dos funciones, f y g, preguntarse si existe alguna relación entre ambas o si una es derivada de la otra, explicando el por qué.

Fuente: Arce et al. (2019)</td></tr>
<tr><td colspan="2">C. Sentido algebraico</td></tr>
<tr><td colspan="2">El propósito de la enseñanza del álgebra está relacionado con el significado de las letras, ya que según sea su interpretación estamos trabajando con diferentes concepciones de álgebra. En esta asignatura se centra el estudio en la letra como generalizador de patrones, como incógnita, como variable y se comienza con el enfoque del estudio de estructuras cuando se aborde el manejo y simplificación de expresiones algebraicas.</td></tr>
<tr><td>Conocimientos, destrezas y actitudes</td><td>Orientaciones para la enseñanza</td></tr>
<tr><td>C.1. Patrones:
– Generalización de patrones en situaciones sencillas.</td><td>El trabajo con patrones tanto desde el punto de vista numérico como geométrico, nos permite trabajar desde la resolución de problemas potenciando el buscar diferentes caminos y estrategias para llegar a la generalización. En Secundaria ya se han propuesto diversas situaciones didácticas en el trabajo con patrones desde 1º ESO, por lo que se cuenta con que el alumnado de Bachillerato ya tenga cierta experiencia y disposición hacia esa forma de trabajar, y por lo tanto en esta etapa se puedan plantear situaciones análogas o ya más complejas de buscar la generalización tanto en situaciones numéricas como geométricas de forma que puedan trabajarse así series aritméticas y geométricas de términos generales sencillos, evitando la complicación excesiva introduciendo fórmulas solo cuando se considere ya necesario y favoreciendo sin embargo en todo momento del proceso orientar al alumnado a utilizar diferentes recurso y representaciones para que valoren la necesidad de las fórmulas y la utilidad de modelizar una situación con su uso.
El trabajo con patrones también permitirá en según qué contextos el trabajar la relación entre variables que nos puede servir de enlace para el trabajo con funciones.
Pueden ser situaciones interesantes como búsqueda de generalización de patrones además de las propuestas en la etapa anterior en las que se puede profundizar, otras como las siguientes:
(a)(Partir de lo general) En un diseño de jardín se quieren poner maceteros siguiendo esta distribución, pide investigar cuantos maceteros son necesarios según los cuadrantes de jardín que queramos tener:

(b) Observa la serie de cuadrados todos de lado una unidad de longitud y continúa con dos elementos más; ¿qué parte sombreada tendrá un elemento cualquiera? ¿Si sumo todas las partes sombreadas, qué área obtendría?

Con este tipo de ejercicios, podemos ir acercando al alumnado a la idea de que en el infinito se puede obtener un límite finito, de gran complejidad cognitiva para ellos.
(c) Investigar cómo se generalizan patrones numéricos que coinciden en los primeros términos pero que pueden comportarse de formas diferentes, por ejemplo la seri numérica 2,4,6…puede continuarse como los número pares y el siguiente es 8 , pero también podría continuar como 10 si se considera que el 6 es la suma de los dos anteriores…</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Otro tipo de tareas que pueden considerarse aquí son tareas de generalización pero en cuanto a leyes numéricas o estructuras aritméticas, como por ejemplo: “Utiliza la siguiente representación para demostrar la propiedad distributiva” a(b+c)=ab+ac siendo a la altura del rectángulo y b,c las bases de los rectángulos adjuntos

(O similares para expresiones de los productos notables)
O “Explica de formas diferentes por qué la suma de dos números impares es un número par”
También son interesantes las búsquedas de patrones y regularidades entre los números para acabar generalizando propiedades.
Una situación para ello sería dar la tabla
<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr>
<tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td></tr>
<tr><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td><td>50</td></tr>
<tr><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>60</td></tr>
<tr><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td><td>70</td></tr>
<tr><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td><td>78</td><td>79</td><td>80</td></tr>
<tr><td>81</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td><td>86</td><td>87</td><td>88</td><td>89</td><td>90</td></tr>
<tr><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td>94</td><td>95</td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>99</td><td>100</td></tr>
</table>
Y pedirles que piensen sobre la propiedad que comparten todos los números de una diagonal, ver si se puede generalizar la propiedad y buscar otro tipo de curiosidades o relaciones para ver si son generalizables (González y Ruiz-Lopez, 2003). Por ejemplo, ver que las esquinas opuestas del 45 suman lo mismo, que es el doble del cuadrado que queda en el centro. Si se desplaza el cuadrado, ¿pasa lo mismo? ¿y si aumentamos el tamaño del cuadrado? ¿Por qué pasa esto?
</td>
</tr>
<tr>
<td>
C.2. Modelo matemático:
– Relaciones cuantitativas esenciales en situaciones sencillas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.
– Ecuaciones, inecuaciones y sistemas: modelización de situaciones de las Ciencias Sociales y de la vida real.
</td>
<td>
Para el primer apartado, se pueden trabajar contextos de proporcionalidad (tanto inversa como directa), situaciones lineales no proporcionales y series aritméticas y geométricas sencillas en las que se puede trabajar con diversidad de representaciones (tabular, gráfica y algebraica) con el apoyo de calculadora, hoja de cálculo y programas dinámicos de funciones como Geogebra además de papel y lápiz.
Se trabaja en situaciones anteriores y en otras, la traducción al lenguaje algebraico de contextos en los que se valore la necesidad o la eficacia de usar una ecuación, inecuación o sistema como herramienta para encontrar la solución. También validar las soluciones y el modelo, es decir validar que en el modelo propuesto para la resolución concuerda y es coherente con la solución obtenida y a su vez validar esa solución en el contexto para comprobar que el modelo elegido ha sido el adecuado.
Para profundizar y pensar en las virtudes o no de un modelo para un contexto se le puede sugerir al alumnado diferentes modelos para un contexto determinado, o bien proponerles a ellos ante un modelo que generen contextos para los que sería o no adecuado, usando la metodología de “invención de problemas” que ayuda a desenmascarar errores y obstáculos cognitivos, de forma que abordándolos con ellos logramos una mayor profundidad en la interiorización de los conceptos.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
C.3. Igualdad y desigualdad:
– Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones no lineales en diferentes contextos.
</td>
<td>
Se orienta en este apartado el uso de las letras como incógnitas, es decir, como números desconocidos fijos de los que hay que encontrar su valor , y está enfocado sobre todo a la resolución de problemas de contexto que pueden ser susceptibles de modelarse mediante lenguaje algebraico. También se orienta al uso del álgebra como estructura, es decir, al manejo del tratamiento de expresiones algebraicas en cuanto a su operatoria, su simplificación y las propiedades de equivalencias entre ellas.
Se recomienda trabajar por lo tanto con problemas de enunciado que refuercen la utilidad de las ecuaciones e inecuaciones para su resolución, reforzando las ecuaciones de una variable lineales, cuadráticas (incidir en métodos de resolución como el completar cuadrados o en descomposición por factores), polinómicas sencillas de grado 3 por descomposición de factores, racionales sencillas (convertibles en polinómicas de grado dos o tres máximo) y si el contexto lo requiere, irracionales sencillas, y las exponenciales y logarítmicas (de resolución mediante las propiedades de las potencias, de aplicación directa) .
En cuanto a inecuaciones con una variable, trabajar de primer, segundo y tercer grado, expresando la solución con diversas representaciones (desigualdad, intervalo y gráfica). Con dos variables: lineales y cuadráticas trabajando su representación gráfica para relacionarla con la propiedad del signo de las funciones más adelante y sistemas de ecuaciones lineales hasta con tres ecuaciones y tres incógnitas, y no lineales con dos ecuaciones.
Relacionar también este apartado con lo trabajado con el apartado C2; ya que se pueden seguir apoyando las argumentaciones de las resoluciones de los problemas en base al aporte visual y dinámico del uso de applets de Geogebra o de hojas de cálculo. Por ejemplo se pueden trabajar situaciones de comparación en contextos de ofertas o de de alquileres o de producción, de manera
</td>
</tr>
</table>

	que la intención se ponga en el razonamiento y argumentación de la respuesta más que en el procedimiento, ya que el modelo gráfico nos lo proporciona un programa, y a partir de ahí también se pueden establecer diferentes situaciones para cambiar parámetros y ver como varían las respuestas y hacer predicciones.
C.4. Relaciones y funciones: – Representación gráfica de funciones utilizando la expresión más adecuada. – Propiedades de las distintas clases de funciones, incluyendo, polinómica, exponencial, racional sencilla, irracional, logarítmica, periódica y a trozos: comprensión y comparación. – Álgebra simbólica en la representación y explicación de relaciones matemáticas de las Ciencias Sociales.	Ya en los apartados C2 y C3 se ha sugerido trabajar con diferentes sistemas de representación (tabular, gráfica y algebraica) y el manejo de programas informáticos. El uso de estas herramientas permite acercar al alumnado a la observación de las propiedades de cada clase de funciones de manera interactiva y visual estableciendo la relación que existe entre los parámetros propios de la expresión algebraica (trabajando se esta forma el álgebra simbólica) y su representación gráfica y deduciendo así sus propiedades (dominio, continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, puntos de corte,simetrías y periodicidad y comportamiento en los extremos). Las funciones lineales y cuadráticas ya han sido trabajadas en la etapa de secundaria, por lo que en este curso se puede incidir más en el resto de las funciones: cúbicas, exponenciales, racionales sencillas, irracionales, logarítmica y a trozos. Los aspectos trabajados en este apartado están estrechamente relacionados con los apartados del sentido de la medida en el que se trabajan los límites, y es por eso importante prestar especial atención en el trabajo con funciones al concepto de "tendencia" mediante el uso de diferentes representaciones (tabular,simbólica y gráfica) para ir interiorizando el concepto de asíntota. En las funciones a trozos también es interesante el uso de herramientas digitales para visualizar entornos de puntos de discontinuidad y continuidad de cara al concepto de límite y cálculo de límites. También puede resultar interesante trabajar la relación entre una función exponencial de base "a" y la logarítmica de la misma base, reforzando así el sentido del logaritmo como número. Plantear situaciones de contexto que se presten para hablar de variación y cambio para entroncar también con el sentido de la medida para la introducción de la derivada.
C.5. Pensamiento computacional: – Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de las Ciencias Sociales utilizando programas y herramientas adecuadas. – Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.	El Pensamiento computacional lleva asociados la práctica con datos, la abstracción, los algoritmos, la descomposición, la generalización, la selección de estrategias para resolver un problema, seleccionar los pasos a dar para ello, por lo que va de la mano con el razonamiento matemático y la resolución de problemas. Implica la práctica con datos, con la modelización y la simulación y permite que el alumnado investigue fenómenos o bien con modelos computacionales ya creados, y también les permite la creación de modelos que involucran procesos algorítmicos y sistemáticos que se pueden desarrollar o bien con lápiz y papel, o con medios tecnológicos, pero que no dejan de ser componentes del pensamiento computacional. El trabajar los apartados C1 (patrones),C2 (modelos) ,C3 y C4 con lápiz y papel pero también y dando peso al apoyo de hojas de cálculo, calculadoras científicas, programas como Derive, Geogebra, Desmos y otros similares proporciona al alumnado potenciar su razonamiento matemático, sus estrategias en la resolución de problemas y mejorar el uso y manipulación de herramientas computacionales en el mundo tecnológico en el que ya viven inmersos, ya que al manejar modelos creados por ellos también van a poder evaluar las ventajas y desventajas de ese modelo y eso también es razonamiento matemático. Por lo tanto este apartado C5 es importante verlo incluido en el trabajo y desarrollo de los cuatro anteriores incidiendo en el razonamiento y argumentación de las respuestas, ya que es una forma de pensar matemáticamente que no tiene sentido tratar de forma aislada.

D. Sentido estocástico

El desarrollo del sentido estocástico está asociado a la alfabetización estadística y probabilística. La primera alude a la capacidad para interpretar datos, evaluarlos críticamente, realizar juicios y valoraciones para expresar opiniones respecto a información estadística, argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos. La segunda se relaciona con la capacidad para acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente diversas situaciones de incertidumbre y riesgo del mundo real, ya sea en la vida cotidiana, política o en contextos relacionados con las ciencias sociales.

En este curso se abordan ambas perspectivas reforzando y asentando aspectos ya trabajados en secundaria haciendo mayor énfasis en la interpretación que en métodos puramente procedimentales para los que se pueden utilizar herramientas informáticas.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
D.1. Organización y análisis de datos: – Organización de los datos procedentes de variables bidimensionales: distribución conjunta y distribuciones marginales y condicionadas. Análisis de la dependencia estadística. – Estudio de la relación entre dos variables mediante la regresión lineal y cuadrática: valoración gráfica de la pertinencia del ajuste. – Coeficientes de correlación lineal y de determinación: cuantificación de la relación lineal, predicción y valoración de su fiabilidad en contextos de las Ciencias Sociales.	Es importante trabajar este apartado desde la perspectiva de un ciclo de investigación en el que el alumnado sea un elemento activo de su aprendizaje. Trabajar con datos de contextos reales que sean significativos para el alumnado porque su implicación en la tarea va a ser mayor, provocar que se hagan preguntas y que tengan que buscar un razonamiento para argumentar su respuesta. Para introducir esta parte hay ideas provechosas en https://nrich.maths.org/statistics Analizar estos datos en la perspectiva unidimensional utilizando para ello hojas de cálculo y programas informáticos que nos permitan trabajar tanto con la representación gráfica como con la tabular y que den resultados de los estadísticos que nos interesen para enfocar los ejercicios más desde el análisis y el debate que desde el cálculo mecánico. Incidiendo en la interpretación de media y desviación típica conjuntas a través de los gráficos de la distribución. Este análisis previo ayudará a uno de los objetivos de este apartado que es trabajar la posible influencia o no entre variables y la intensidad de la misma. El análisis de la dependencia entre variables aleatorias es uno de los aspectos fundamentales para desarrollar el sentido estadístico. Gracias a la tecnología es fácil tener acceso a grandes cantidades de datos por parte de instituciones y oficinas de información. Para razonar si hay una relación más o menos intensa entre variables es necesario ver los datos con ojos críticos, hacerse preguntas y ver si el modelo de regresión asociado resulta útil para realizar

– Calculadora, hoja de cálculo o software específico en el análisis de datos estadísticos.	predicciones. Una de las dificultades del análisis bidimensional es que al calcular la recta de regresión el alumnado confunde la relación entre las variables con un modelo lineal (o cuadrático) y olvida que trabaja en una situación aleatoria, por lo que puede no darse cuenta de la existencia de otras variables que influyen en cómo salen los resultados (paradoja de Simpson) y dejarse llevar por creencias equivocadas incluso a la luz de los datos. Establecer la diferencia entre correlación y causalidad no es sencillo en situaciones aleatorias: un estudio de correlación es útil para intuir e identificar la tendencia de dos variables a "moverse juntas", pero esto no siempre va acompañado de que una variable sea la causa absoluta de la variación de la otra, ya que la relación entre las variables puede ser efecto del azar o puede existir una tercera variable que esté influyendo de alguna manera en fortalecer o debilitar esa relación observada.Un ejemplo sencillo de comprender es cuando tras una vacunación masiva para una enfermedad "A" aparecen varios casos de algún tipo de otra enfermedad "B" y se da por hecho que la causa del aumento de esa enfermedad B es debida a la vacuna A .Es probable que en un diagrama de puntos pueda verse cierta correlación (que es un proceso matemático) entre ambas, pero la conclusión final sobre si en esta relación que se observa hay además una relación causa efecto, hay que trabajarlo con otros métodos que según el campo en el que nos movamos podrán ser unos u otros, en el caso de las vacunas sería el campo de la investigación médica que puede crear grupos de control para establecer comparativas, por ejemplo para llegar a una conclusión fiable. En una situación aleatoria en la que se quiere conocer el grado de influencia o relación entre dos variables, por un lado, se quiere establecer la medida o intensidad de esa relación y por otro si hay algún modelo funcional que nos lo describa. Debe el alumnado por lo tanto conocer en este apartado: los datos y su distribución, su representación tabular y gráfica (nube de puntos entre otras como por ejemplo la de burbujas), la variabilidad de los datos a través de la representación, distinción entre dependencia funcional, aleatoria e independencia; la covarianza y el coeficiente de correlación como medida de la intensidad de esa relación. A la vez conviene tener en cuenta la posible influencia de variables no medidas que pueden confundir lleva a confundir causalidad con correlación: por ejemplo si se intenta estudiar la relación entre la nota media obtenida en matemáticas del alumnado con el número de personas del grupo en el que estudian habrá de tenerse en cuenta para la interpretación de resultados variables que no se han "medido" como puede ser si ha influido la dificultad de la tarea propuesta o la motivación personal del alumnado que compone el grupo sea o no numeroso. Conviene presentar diferentes modelos de regresión, para que vean que según los datos unos modelos se ajustan mejor que otros, diferenciar la variable dependiente de la independiente, reconocer la existencia o posible existencia de datos atípicos y su influencia en el modelo de ajuste, y desde ahí iniciarlos en la estimación y la bondad del ajuste en función de la fiabilidad que proporciona el modelo. Puede ser útilhttps://www.geogebra.org/search/interpolacion. O tambiénhttps://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5ec7595782e85414e816d97c?lang=es También es importante con ayuda de los medios tecnológicos el analizar de forma intuitiva la mayor o menor dispersión que se produce al elegir un modelo de predicción u otro y por lo tanto haciendo más consciente la magnitud del error cometido en la predicción.Puede ser conveniente plantear situaciones en las que con un mismo diagrama de dispersión se presenten diferentes modelos de ajuste mediante medios informáticos y analizar su fiabilidad; y también presentar diferentes diagramas que respondan a modelos distintos de ajuste. Es importante trabajar este apartado desde la perspectiva de un ciclo de investigación en el que el alumnado sea un elemento activo de su aprendizaje. Trabajar con datos de contextos reales que sean significativos para el alumnado porque su implicación en la tarea va a ser mayor, y enfocar la tarea desde la perspectiva de un proyecto que pretenda dar respuesta a una pregunta global como por ejemplo:" ¿Cuáles son los factores que más influyen en...?" Con todo ello se pretende que el alumnado sepa establecer razones argumentadas en cuanto a la covarianza entre dos variables estudiadas Dado que al analizar los datos se estimula el debate, se favorece también el sentido socio afectivo ya que el alumnado ha de escuchar, interpretar, aprender de los compañeros y compartir sus opiniones con los demás siempre desde el respeto y la buena convivencia.
D.2. Incertidumbre: – La probabilidad como medida de la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios. – Cálculo de la probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa. – Cálculo de probabilidades en experimentos simples: la regla de Laplace en situaciones de equiprobabilidad y en combinación con diferentes técnicas de recuento.	Las orientaciones dadas para secundaria a lo largo de los cuatro cursos para, trabajando con situaciones abiertas y desde la resolución de problemas, acercar al alumnado los enfoques de probabilidad intuitiva, laplaciana, frecuencial y subjetiva debe ser afianzada en este primer curso de bachillerato, y también formalizar el álgebra y operaciones con sucesos, e introduciendo el enfoque axiomático de la probabilidad y sus propiedades y su aplicación en casos sencillos. Este saber tiene una estrecha relación con los saberes del sentido de la medida ya que la probabilidad permite medir la incertidumbre de ciertos fenómenos aleatorios. Para trabajar el álgebra de sucesos pueden resultar útiles las representaciones gráficas mediante diagramas de Venn como apoyo visual a otras interpretaciones de la operación con sucesos. Asimismo, conviene profundizar en las herramientas de tablas de doble entrada y diagramas de árbol planteando situaciones que puedan ser resueltas con ambas indistintamente potenciando así la flexibilidad de cambios de representación del alumnado y es deseable ir relacionando las operaciones con un lenguaje probabilístico más formal acorde con el manejo del álgebra de sucesos. En este curso, sin desligarse completamente de la experimentación es conveniente darle un sustento más formal. Para trabajar la combinatoria como herramienta de conteo para el cálculo de

	probabilidades, es interesante para el profesorado conocer distintos modelos de combinatoria diferentes y ser conocedor de los errores más habituales cometidos por el alumnado (Navarro, Batanero y Godino, 1996). Junto con los diagramas de árbol se pueden plantear situaciones de cálculo de probabilidades sencillas en las que haya que utilizar otras formas de "contar"diferentes para conocer el total de los casos posibles o el de los casos favorables. Un recurso que puede ayudar a trabajar la ley de los grandes números y problemas interesantes de probabilidad para este curso es la página de Geogebra de Manuel Sada:https://www.geogebra.org/m/qjWuUAgs#chapter/212256 Así como la páginahttps://nrich.maths.org/9840 que es un repertorio variado con guía para el profesorado de actividades que combinan el aula con la simulación virtual En situaciones de juego es interesante trabajar el concepto esperanza matemática y de "juego equitativo" en situaciones sencillas y razonar de forma crítica a través de ello sobre creencias populares sobre el juego y las consecuencias que pueden derivar de ello.
D.3. Distribuciones de probabilidad: – Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución. – Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Cálculo de probabilidades asociadas mediante herramientas tecnológicas. – Estimación de probabilidades mediante la aproximación de la binomial por la normal.	Conectar las distribuciones empíricas con las de probabilidad como modelo teórico no es un concepto sencillo. En Secundaria ya se propone trabajar con actividades que permitan el acercamiento con variables discretas como por ejemplo el lanzamiento de dos dados y observar la suma de sus caras, o bien lanzar monedas y contar el número de caras que ofrece un modelo binomial de probabilidad (https://www.geogebra.org/m/pmxXRa55). Para aclarar el concepto de sí una situación responde a un modelo BInomial o no, pueden trabajarse actividades de razonamiento como la que aparece ehttps://nrich.maths.org/13892 Para acercarnos a la variable continua se pueden recoger datos de pesos o alturas del INE, (o cualquier otra variable continua de otras bases de datos que sean accesibles, incluso mediciones realizadas por el alumnado) y mediante tratamiento informático estudiar la forma de su distribución para aproximarnos al modelo de la Normal y desde ahí trabajar el cálculo de probabilidades con ella.El uso de herramientas informáticas permite dar más espacio a la interpretación razonada de las distribuciones y sus parámetros y no conviene por lo tanto priorizar la inversión de tiempo en la realización mecánica de operaciones únicamente. Del mismo modo es conveniente usar simulaciones y herramientas comohttps://www.geogebra.org/m/ueaxe2dy en la que se muestra de forma muy visual el porqué una distribución Binomial en determinadas condiciones puede aproximarse por una distribución Normal.
D.4. Inferencia: – Diseño de estudios estadísticos relacionados con las Ciencias Sociales utilizando herramientas digitales. Técnicas de muestreo sencillas. – Análisis de muestras unidimensionales y bidimensionales con herramientas tecnológicas con el fin de emitir juicios y tomar decisiones: estimación puntual.	Este sub-apartado requiere trabajar simultáneamente con el D.1 aprovechando también lo que el alumnado ya ha trabajado sobre incertidumbre y probabilidad que les ayuda también a emitir juicios y tomar decisiones. Para trabajar las técnicas de muestreo, podrían establecerse grupos de trabajo que tomasen datos sobre un mismo aspecto a estudiar, pero cada uno con una técnica diferente, de forma que luego puedan establecerse conclusiones sobre los resultados obtenidos en los diferentes grupos en cuanto a ventajas, desventajas o conveniencia o no de cómo ha de elegirse una muestra para que sea lo más representativa posible. Para mostrar diferentes gráficos y tomar datos para realizar inferencias se puede acudir a páginas web de institutos estadísticos locales ,nacionales o internacionales así como páginas web que proporcionan mucho material para realizar estos análisis de variables:https://www.gapminder.org/resources/ página sueca que proporciona mucha información con diferentes gráficos analizando temas de interés global, se puede usar para extraer datos, o para proyectar y establecer dinámicas de interpretación de datos e inferencias en el aula usando los efectos dinámicos que proporciona la página. También se pueden extraer colecciones interesantes de datos en https://www.ine.es/ (Instituto Nacional de Estadística) Estas pueden dar ideas para que el alumnado realice diseños proponiendo el tema a tratar relacionado con las Ciencias Sociales en función de sus intereses, dándoles pie en ese estudio a que realicen muestras de diferentes tamaños y observen cómo varían los estadísticos, ayudados por programas informáticos, trabajando así la variabilidad de los mismos e interpretando las misma como dato a tener en cuenta a la hora de tomar decisiones. Se sugiere la lectura de (Batanero et al., 2019) para profundizar en aspectos didácticos del muestreo, una idea estocástica fundamental, como las principales dificultades del alumnado asociadas a este saber y ejemplos de tareas propuestas para trabajar su comprensión en el aula.

E. Sentido socioafectivo

El desarrollo de esta competencia conlleva identificar y gestionar las propias emociones en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, reconocer las fuentes de estrés, ser perseverante en la consecución de los objetivos, pensar de forma crítica y creativa, crear resiliencia y mantener una actitud proactiva ante nuevos retos matemáticos. Asimismo, implica mostrar empatía por los demás, establecer y mantenerrelaciones positivas, ejercitar la escucha activa y la comunicación asertiva en el trabajo en equipo y tomar decisiones responsables. Para propiciar el trabajo efectivo en estos aspectos es necesario establecer un clima en el aula en el que se favorezcan el diálogo y la reflexión, se fomente la colaboración y el trabajo en equipo, y se valoren los errores y experiencias propias y de los demás como fuente de aprendizaje.

Se debe también fomentar la ruptura de estereotipos e ideas preconcebidas sobre las matemáticas asociadas a cuestiones individuales como, por ejemplo, las relacionadas con el género o con la existencia de una aptitud innata para las matemáticas. Con este objetivo se propone, por ejemplo, el uso de actividades que den lugar a un aprendizaje inclusivo (por ejemplo, tareas ricas o actividades de "suelo bajo y techo alto"). Por otra parte, hay que incluir oportunidades para que el alumnado conozca las contribuciones de las mujeres, así como de distintas culturas y minorías, a las matemáticas, a lo largo de la historia y en la actualidad.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
E.1. Creencias, actitudes y emociones: – Destrezas de autoconciencia encaminadas a reconocer emociones propias, afrontando eventuales situaciones de estrés y ansiedad en el aprendizaje de las matemáticas. – Tratamiento del error, individual y colectivo como elemento movilizador de saberes previos adquiridos y generador de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas.	La resolución de un problema significa comprometerse con la solución de una tarea para la que no se conoce previamente el método de solución. Al abordar los problemas, los estudiantes tienen que razonar matemáticamente, emplear sus conocimientos matemáticos y en ocasiones, adquirir nociones matemáticas nuevas. A través de la resolución de problemas se desarrollan actitudes básicas para el trabajo matemático: perseverancia, flexibilidad, estrategias personales de autocorrección y de superación de bloqueos, confianza en las propias posibilidades, iniciativa personal, curiosidad y disposición positiva a la reflexión sobre las decisiones tomadas y a la crítica razonada, planteamiento de preguntas y búsqueda de la mejor respuesta, aplicando lo aprendido en otras situaciones y en distintos contextos, interés por la participación activa y responsable en el trabajo en pequeño y gran grupo. Observamos que para el desarrollo de estas destrezas no se trata, por tanto, de que los estudiantes reciban instrucción directa sobre educación emocional, ni sobre los componentes de la dimensión afectiva en matemáticas (valores, creencias, actitudes y emociones) y sus diferencias, sino que en la práctica diaria de clase diseñada por el profesorado ponga en juego distintas estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo. Por ejemplo: favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas; revisar los pasos seguidos en la resolución de una tarea para plantearse si hay errores o si lo obtenido puede emplearse en otras situaciones; revisar las distintas resoluciones obtenidas, enfatizando en que no hay una única manera de resolver un problema; identificar en las tareas cuáles son los aspectos clave para su resolución y prever qué tipo de andamiaje ofrecer a los estudiantes en caso de bloqueo, etc.
E.2. Trabajo en equipo, toma de decisiones, inclusión, respeto y diversidad: – Reconocimiento y aceptación de diversos planteamientos en la resolución de problemas, transformando los enfoques de los demás en nuevas y mejoradas estrategias propias, mostrando empatía y respeto en el proceso. – Técnicas y estrategias de trabajo en equipo para la resolución de problemas y tareas matemáticas, en grupos heterogéneos. – Destrezas para desarrollar una comunicación efectiva: la escucha activa, la formulación de preguntas o solicitud y prestación de ayuda cuando sea necesario. – Valoración de la contribución de las Matemáticas y el papel de matemáticos y matemáticas a lo largo de la historia en el avance de las Ciencias Sociales.	El trabajo en pequeños grupos heterogéneos, de tres o cuatro alumnos o alumnas, a ser posible conformados de manera aleatoria, hace que el alumno o la alumna no se tengan que afrontar solos al problema que se plantea y se sientan más seguros al expresar sus ideas en condiciones de igualdad. El objetivo aquí es fomentar la interacción y la conversación entre iguales para discutir diversas formas de abordar un problema y llegar a acuerdos. Cuando la cultura de aula incorpora de forma natural y cotidiana estas interacciones, las estrategias personales que pueda tener cada alumno o alumna de forma espontánea se ven ampliadas y enriquecidas, al mismo tiempo que obliga a utilizar un lenguaje matemático (en sentido amplio, atendiendo a sus diversos registros, desde el lenguaje oral hasta el simbólico-numérico, pasando por diagramas y esquemas) que comprendan los compañeros. En definitiva, hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. El profesorado debe plantear preguntas abiertas al alumnado, preguntas ricas, que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás y a buscar recursos en el aula que necesiten para resolver el problema. También es vital dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. No es suficiente con lanzar la pregunta y acto seguido, a los pocos segundos, desvelar la respuesta. Las matemáticas son una actividad característica de la especie humana, al igual que la literatura, el arte, la física o la música. Las matemáticas tienen un pasado, un presente y un futuro, y es importante que el alumnado sea consciente de la naturaleza viva de las matemáticas. Las matemáticas no son algo acabado, sino que, a lo largo de la historia, con la contribución de matemáticos y matemáticas del mundo se han ido construyendo las ideas matemáticas que hoy conocemos y que se encuentran en la base de todas las ciencias. Conocer la Historia de la Matemática conlleva, por una parte, entender mejor el desarrollo y motivación de conceptos e ideas en matemáticas, que en ocasiones aparecen desconectados entre sí dentro del currículo. Por otra parte, puede contribuir a cambiar la percepción del alumnado hacia la asignatura, haciéndola más cercana y coherente. Conocer su historia implica también comprender mejor el papel de las matemáticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, y les da un contexto. Por último, una perspectiva histórica nos permite abordar cuestiones como las dificultades de acceso a las matemáticas por parte de la mujer y otras minorías a lo largo de los siglos. Se puede hacer un primer acercamiento a la historia de las matemáticas procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. En este sentido se pueden encontrar recursos, como el monográfico de Barbin et al. (2018), en la página web Convergence de la MAA (https://www.maa.org/press/periodicals/convergence) o en la web de nrich (https://nrich.maths.org/9443). También es posible encontrar otros materiales como lecturas o audiovisuales de contenido matemático, tanto de ficción como no ficción (podcasts, documentales, entrevistas, etc).

III.2.2. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

A. Sentido numérico
En este curso, el alumnado deberá profundizar en las diferencias entre los conjuntos y qué propiedades se conservan y cuáles no al pasar de un conjunto a otro, experimentar con otras clases de conjuntos en los que aparecen números con propiedades y patrones nuevos. También

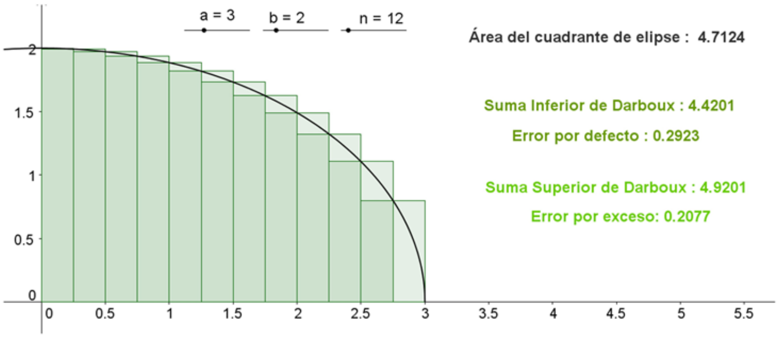
es objetivo de este curso el operar con fluidez números reales y resolver problemas con matrices, utilizando la tecnología cuando sea apropiado. Por este motivo, este sentido se encuentra estrechamente ligado al sentido algebraico y computacional. Es importante que el alumnado sepa decidir razonadamente qué herramientas usar y cuándo usarlas para realizar cálculos con fluidez: saber elegir entre el cálculo mental, estrategias de lápiz y papel, la estimación y el uso de la calculadora. La resolución de problemas y la práctica de la técnica formal, deben desarrollarse en paralelo.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
A.1. Sentido de las operaciones: – Adición y producto de matrices: interpretación, comprensión y aplicación adecuada de las propiedades. – Estrategias para operar con números reales y matrices: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.	En este curso se continúa con el trabajo realizado el curso anterior y se introducen las matrices. El estudio de las matrices nos permite realizar varias conexiones con otras ramas de las matemáticas debido a su uso en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en la representación de transformaciones geométricas y en el análisis de gráficos vértice-arista (NCTM, 2000). Para conocer qué propiedades se mantienen con las matrices, el alumnado debe realizar un trabajo de exploración (asociativa, conmutativa y distributiva). A medida que el alumnado aprenda a representar sistemas de ecuaciones usando matrices, debe reconocer cómo las operaciones en las matrices corresponden a las transformaciones de tales sistemas. Se recomienda revisar el sentido algebraico y computacional para trabajar estos contenidos de forma conjunta. Asimismo, en este bloque se trabajará el desarrollo de la fluidez en las operaciones con números reales, utilizando el cálculo mental o escrito y las herramientas tecnológicas adecuadas. Una mayor comprensión de los números implica que el alumnado aprenda a considerar las operaciones de manera general y no sólo en cálculos particulares incidiendo en las propiedades de los números involucrados. Asimismo, el razonamiento es importante para juzgar la razonabilidad de los resultados obtenidos. Se debe animar al alumnado a extraer sus propias conclusiones y justificarlas pensando en las propiedades de los números.
A.2. Relaciones: – Conjuntos de matrices: estructura, comprensión y propiedades.	En este bloque, se debe trabajar la comparación así como el contraste de las propiedades de los números y los sistemas numéricos que el alumnado conoce, como son los números racionales y reales. Es importante mostrar las matrices como sistemas donde se conservan algunas propiedades de los números reales. Asimismo, las matrices deben trabajarse asociándolas al sentido algebraico. Se recomienda revisar el sentido algebraico y computacional para trabajar estos contenidos de forma conjunta.

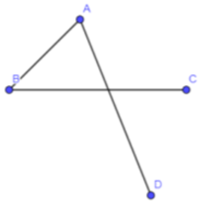
B. Sentido de la medida

Los saberes correspondientes a este sentido durante este curso se organizan en torno a dos bloques o ideas relacionadas con el sentido de la medida: medición y cambio. En cuanto a los saberes relativos a la medición, en este curso se integran saberes relacionados con los sentidos algebraico y estocástico. Es destacable que dentro de este bloque aparecen saberes relacionados con el cálculo integral, lo que permite orientar el trabajo de estos contenidos hacia la integral definida como herramienta para calcular áreas y volúmenes, antes que reducir el cálculo integral a la obtención de primitivas de una función. En cuanto a las nociones para el estudio del cambio en magnitudes asociados al sentido de la medida, los dos saberes de este bloque pueden ser interpretados como dos aplicaciones del cálculo diferencial introducido el curso anterior: representación y estudio de funciones y resolución de problemas de optimización.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
B.1. Medición: – Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva. – Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas.	El origen histórico del concepto de integral es previo al origen de derivada o límite y está motivado por el cálculo de áreas acotadas por regiones planas, muchos siglos antes de que Barrow detectase la relación inversa existente entre problemas de cuadraturas y de tangentes. En esa línea, los saberes relacionados con la integral y, en particular con la integral definida, se ubican en este bloque de saberes. El planteamiento al alumnado de problemas sencillos de cuadraturas (con funciones constantes, lineales, con una parábola, con un cuarto de círculo…) pueden servir para introducir el concepto de integral definida, evitar que el alumnado identifique a la integración únicamente como la operación inversa de la derivación y apreciar que hay otras técnicas de integración más allá de las que llevan al cálculo de la primitiva de una función y a la aplicación de la regla de Barrow. El cálculo del área bajo la curva puede realizarse empleando distintas figuras como triángulos, trapecios, rectángulos, etc. En un primer momento, siempre que la función no sea lineal, se aconseja el uso de rectángulos con base en intervalos del eje de abscisas y altura igual a imágenes de la función. El uso de programas como GeoGebra o Derive ayuda a visualizar las aproximaciones al área, la porción de área considerada y la que falta/sobra y el efecto de cambiar los rectángulos, o estrechar progresivamente su base. Es relativamente sencillo construir un applet, como el de la imagen, (o descargar uno ya construido en, por ejemplo, https://www.geogebra.org), en el que se muestran las sumas inferiores y superiores de Darboux para una curva, utilizando una partición del intervalo y, en el caso en que se crea necesario, calculando el error por defecto y por exceso respecto al área de la curva. Además, el uso de este tipo de applets puede ser combinado junto con una hoja de cálculo para llevar registro de cómo se aproximan numéricamente las sucesiones de las sumas superiores e inferiores al realizar particiones más pequeñas del intervalo y coordinar la representación gráfica y la aproximación geométrica del área bajo la curva con la representación numérica de las dos sucesiones y la convergencia de las mismas al valor del área.

<table>
<tr><td></td><td>

Fuente: Arce, Conejo y Muñoz (2019)
La comprensión de la definición de integral a partir del área requiere una buena comprensión de los conceptos de función, covariación funcional y límite. Aranda y Callejo (2020, 2010), Azcárate et al. (1996), Turégano (1997), entre otros, plantean propuestas de enseñanza que enfocan el trabajo de la integral definida desde el cálculo de área de manera previa a la introducción de la función primitiva, el teorema fundamental del cálculo, las técnicas elementales de integración y la Regla de Barrow.
Por otro lado, se sugiere presentar actividades en contextos diversos y no sólo los puramente geométricos, donde el cálculo integral para calcular el área pueda ser interpretado como una magnitud, por ejemplo, cuando las funciones relacionan velocidad y tiempo para dar al área una interpretación de desplazamiento, tasa de crecimiento de una población anual y tiempo donde el área se interpreta como el crecimiento, caudal de un río y tiempo donde el área se interpreta como volumen de agua o coste marginal y volumen de producción para que el área sea interpretada como coste total.</td></tr>
<tr><td>B.2. Cambio:
– La derivada como razón de cambio en resolución de problemas de optimización en contextos diversos.
– Aplicación de los conceptos de límite y derivada a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones.</td><td>Algunos de los saberes de este bloque han sido presentados con anterioridad en el bloque B.2. Cambio de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (límite y derivada), por lo que se recomienda que, a la hora de abordar los saberes de este bloque, el profesorado se asegure de activar los saberes trabajados en el curso anterior mediante actividades de evaluación inicial. Además, estos saberes también están estrechamente vinculados con los saberes de los bloques C.2. Modelo matemático y C.4. Relaciones y funciones por lo que se sugiere un tratamiento integrado de estos bloques.
Los saberes de este bloque pueden ser vistos como dos aplicaciones del cálculo diferencial.
En los problemas de optimización, Azcárate et al. (1996) señalan que los estudiantes tienen dificultades en tres pasos: ser capaces de traducir el problema planteado a un problema en el que haya que determinar los máximos y mínimos de una función, ser capaces de aplicar el cálculo diferencial a la función hallada y ser capaces de interpretar la respuesta en términos del problema resuelto. Estos autores también sugieren que en una secuencia de enseñanza, los primeros problemas de optimización sean de función polinómica y de carácter geométrico para facilitar su resolución y señalan la importancia de que alumnado domine el primer paso o primera fase de resolución, sea cuidadoso en la elección de las variables dependientes e independientes ya que pueden simplificar los cálculos y se percate de que no en todas las funciones que presentan un máximo o mínimo relativo, estos serán las soluciones al problema de optimización, ya que puede que no cumplan con las restricciones del problema o que la función presente discontinuidades.
En las situaciones de representación de funciones, los estudiantes tienden a mecanizar el proceso del estudio en una serie de pasos desconectados. La ausencia de conexiones entre cada uno de los aspectos estudiados (dominio, simetría, cortes con los ejes, continuidad, signo de la función, asíntotas, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, puntos críticos, etc.) impide que puedan relacionar la información obtenida para cada uno de ellos y, en caso de cometer algún error de cálculo, pueden proporcionar informaciones contradictorias que no son identificadas como tales. Se sugiere que antes de realizar el estudio pormenorizado de la función y realizar su representación gráfica, el alumnado realice un esbozo o dibujo aproximado, basado en el dominio, los puntos de cortes con los ejes y los límites en el infinito, antes de la aplicación del cálculo diferencial para determinar la situación exacta de los máximos y los mínimos y de los puntos de inflexión. Finalmente, también se recomienda que el alumnado pueda emplear programas de representación de funciones con el propósito de corregir los estudios y representaciones gráficas realizados.</td></tr>
<tr><td colspan="2">C. Sentido algebraico</td></tr>
<tr><td colspan="2">El propósito de la enseñanza del álgebra está relacionado con el significado de las letras, ya que según sea su interpretación estamos trabajando con diferentes concepciones de álgebra. En esta asignatura se centra el estudio en la letra como generalizador de patrones, como incógnita , como variable y se profundiza el enfoque del estudio de estructuras cuando se aborde el manejo y simplificación de expresiones algebraicas con números reales y matrices</td></tr>
<tr><td>Conocimientos, destrezas y actitudes</td><td>Orientaciones para la enseñanza</td></tr>
<tr><td>C.1. Patrones:
– Generalización de patrones en situaciones diversas.</td><td>Se sugiere en este curso incluir actividades que sigan reforzando el razonamiento algebraico en su enfoque más estructural buscando regularidades para llegar a la generalización de patrones con objetos matemáticos como las matrices y las derivadas en casos sencillos y buscar después la particularización.
Ejemplos para trabajar este apartado podrían ser los siguientes:</td></tr>
</table>

	Con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calcular A^2, A^3, A^n y A^{29} Con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcular A^n y $A^{40}-2A^{37}$ Dada la función $f(x) = 2^x$ calcular su derivada n-ésima (d) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ calcular su derivada n-ésima
C.2. Modelo matemático: – Relaciones cuantitativas en situaciones complejas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas. – Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos. – Técnicas y uso de matrices para, al menos, modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales o grafos. – Programación lineal: modelización de problemas reales y resolución mediante herramientas digitales.	Es conveniente centrarse en situaciones de contexto en las que haya una relación entre dos variables clara pero tengamos la necesidad de encontrar otra relación que sea la mejor posible en un determinado contexto. La elección de esa función requiere una cierta dosis de creatividad y entra dentro de la categoría de los problemas de optimización. Es posible analizar estos modelos con herramientas informáticas proporcionando así diversos sistemas de representación razonando si es o no adecuado al contexto y si la solución que proporciona es también válida. Trabajar con contextos donde intervengan hasta tres incógnitas que puedan traducirse mediante un sistema de ecuaciones, variando el número de incógnitas y ecuaciones (2 y 3, 3 y 2, 3 y 3, 4 y 3…) y estudiar la validez de dicho modelo analizando las posibles soluciones que ofrece en el contexto. Utilizar programas tecnológicos para poder reflexionar sobre situaciones con mayor número de variables y/o ecuaciones. Uso de matrices y sus propiedades para representar esas relaciones y la validez del modelo. Representar las relaciones que provoca un determinado contexto entre cantidades y/o variables por medio del objeto matemático de Matriz valorando su utilidad. Pueden proponerse como tareas novedosas en este curso el objeto matemático de los grafos con situaciones introductorias sencillas como las conexiones entre 4 lugares en un mapa, y estudiar con su matriz de adyacencia y su cuadrado el número de conexiones para ir de un lugar a otro de un solo camino o como combinación de otros.  $\longrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Conviene también presentar dentro de las situaciones alguna que se resuelva mediante **programación lineal**, teniendo en cuenta que va a ser la primera aproximación del alumnado a este tema y apoyados en herramientas digitales, buscando más la discusión y comprensión de los elementos que entran en juego en la búsqueda de la solución, que la parte procedimental en un primer momento. Para esta primera aproximación pueden plantearse situaciones abiertas al alumnado para trabajar en equipo y luego comentar resultados, aprovechando así tanto para formalizar conceptos como para trabajar obstáculos y errores que hayan podido surgir y acabar trabajando después la situación con un programa que permita visualizar las respuestas que se hayan dado en el aula. Un ejemplo de situación a trabajar podría ser: “En una confitería se hacen dos tipos de tartas, una de trufa y otra de crema y nata, que se venden a 10€ y 15 € respectivamente. (a) Explica cómo pueden calcular el beneficio de la venta. (b) Haz una tabla con las posibilidades de ganancia de la venta en un día cualquiera. (c) Si cada tarta de trufa necesita 500gr de chocolate y en el almacén solo tienen 10 kilos ¿Cambiaría tu respuesta del apartado b?¿cómo y en qué?. (d) Suponed que además la tarta de nata y crema necesita 1litro de leche, la de trufa necesita medio litro y en el almacén para ese día solo tienen 20 litros disponibles, ¿cambiarías de nuevo tu respuesta del apartado b? ¿Cómo y por qué?” O bien introducir un enunciado de problema de transporte que sea muy sencillo, para que pueda el alumnado establecer parte de las soluciones con las herramientas algebraicas y numéricas de las que ya disponen A partir de aquí y de preguntas similares que obligan a cambiar las respuestas dadas al inicio se puede comenzar a hablar de cómo afectan las restricciones que conllevan algunas situaciones, su relación con regiones del plano (trabajando así ya la relación con parte del apartado D3), hablar de regiones acotadas y no acotadas y tipos de situaciones con o sin soluciones, de la función objetivo e introducir el método del simplex. https://www.geogebra.org/search/programacion%20lineal
C.3. Igualdad y desigualdad: – Formas equivalentes de expresiones algebraicas en la resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, mediante cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, y con herramientas digitales.	En este curso se introducen como nuevas expresiones algebraicas las ecuaciones y sistemas matriciales, siendo una de sus aplicaciones el cálculo de la matriz inversa. De nuevo este bloque está en estrecha relación y ha de trabajarse simultáneamente con el apartado A.1 de sentido numérico en los que se presentan nuevos objetos matemáticos como las matrices y los determinantes. En cuanto al trabajo con sistemas de ecuaciones, y dado que una de las representaciones de un sistema de ecuaciones lineales es mediante una matriz, es importante trabajar con el Teorema de RoucheFrobenius para clasificar los sistemas y sus soluciones, atendiendo a la relación entre el rango de la matriz de coeficientes del sistema, la matriz ampliada y el número de soluciones. Para la resolución del sistema se pueden utilizar tanto los métodos ya conocidos por el alumnado de

– Resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones en diferentes contextos.	reducción, igualación, sustitución o una combinación de los mismos si la situación lo requiere, y el método de Gauss. Se introduce en este apartado de resolución de sistemas el uso de parámetros dentro del enfoque del álgebra de manejo de expresiones y estructuras, de forma que el parámetro puede aparecer como coeficiente de la matriz de coeficientes del sistema, y la solución del mismo dependerá de los valores que pueda tomar; o bien aparecerá como número que recorre la recta real en la expresión de las soluciones de sistemas compatibles indeterminados. Además el alumnado debe manejarse ya con soltura en la resolución de ecuaciones e inecuaciones trabajadas en cursos anteriores, ya que las seguirá utilizando como herramienta para el estudio de propiedades de funciones (monotonía, puntos de corte, curvatura….)
C.4. Relaciones y funciones: – Representación, análisis e interpretación de funciones con herramientas digitales. – Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.	Este curso se sigue trabajando y profundizando en las funciones del curso anterior: lineales, cuadráticas, racionales e irracionales sencillas, exponenciales y logarítmicas y se amplía con funciones que son el resultado de operaciones y composiciones entre ellas. Con soporte digital e informático se profundiza en las propiedades de estas funciones así obtenidas y en sus características (dominio, recorrido, signo, puntos de corte, continuidad, monotonía, curvatura y asíntotas) trabajando tanto la comprensión gráfica del concepto como relacionando las propias características de una función para sobre ellas argumentar otras. Por ejemplo, razonar la existencia de un máximo o un mínimo relativo en una función atendiendo a su monotonía y continuidad si es el caso, sin tener que realizar sistemáticamente el criterio de la segunda derivada. Es importante manejar en este campo la representación numérica de la función (tablas) , la operatoria con lenguaje algebraico y la representación gráfica y saber interpretar y comprender cada una de ellas en conjunto armonioso con las otras en las diferentes características estudiadas. Por lo tanto si se calcula la ecuación de una asíntota mediante técnicas de cálculos de límites, también hay que comprenderlo con una tabla de valores (hoja de cálculo) o una visualización de la función y la asíntota (uso de herramienta informática), y lo mismo para puntos de discontinuidad, o monotonía. Para dar sentido al cálculo de asíntotas, conviene proponer ejercicios de contextos relacionados con modelos de población o situaciones de producción, por ejemplo, en los que la función que explica el modelo posea asíntotas que nos permiten predicciones fiables “a la larga” con modelos lineales más sencillos de trabajar que el modelo de función inicial , facilitando así la comprensión del concepto de tendencia y de infinito al alumnado. Ejemplo : Considera la función siguiente donde t representa años $f(t)=\dfrac{t^2+2}{t-2}$ (a) Calcula la imagen para 2 años , para 4 años , para 10 años y para 100 años .(b)Calcula su asíntota oblicua y(t), y calcula su valor también para 2, 4 , 10 y 100 años. (c) Compara el error absoluto y relativo cometido al predecir f(t) con y(t) a los 4 años y a los 150 años. (d) ¿Qué pasará con el error relativo con los años Este apartado del sentido algebraico conecta por lo tanto con los apartados desarrollados en el sentido de la medida tanto en 1º de CCSS como en 2º de CCSS, por lo que hay que tenerlo en cuenta a la hora de comprender la función y por lo tanto se trabaja también conjuntamente con el sentido de la medida.
C.5. Pensamiento computacional: – Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de las Ciencias Sociales empleando las herramientas o los programas más adecuados. – Análisis algorítmico de las propiedades de las operaciones con matrices y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.	El Pensamiento computacional lleva asociados la práctica con datos, la abstracción, los algoritmos, la descomposición, la generalización, la selección de estrategias para resolver un problema, seleccionar los pasos a dar para ello, por lo que va de la mano con el razonamiento matemático y la resolución de problemas. Implica la práctica con datos, con la modelización y la simulación y permite que el alumnado investigue fenómenos o bien con modelos computacionales ya creados, y también les permite la creación de modelos que involucran procesos algorítmicos y sistemáticos (método de Gauss para la resolución de sistemas y para el cálculo de la matriz inversa, por ejemplo) que se pueden desarrollar o bien con lápiz y papel, o con medios tecnológicos, pero que no dejan de ser componentes del pensamiento computacional. El trabajar los apartados C1 (patrones), C2 (modelos),C3 y C4 con lápiz y papel pero también y dando peso al apoyo de hojas de cálculo, calculadoras científicas, programas como Derive, Geogebra, Desmos y otros similares proporciona al alumnado potenciar su razonamiento matemático, sus estrategias en la resolución de problemas y mejorar el uso y manipulación de herramientas computacionales en el mundo tecnológico en el que ya viven inmersos, ya que al manejar modelos creados por ellos también van a poder evaluar las ventajas y desventajas de ese modelo y eso también es razonamiento matemático. Por lo tanto este apartado D5 es importante verlo incluido en el trabajo y desarrollo de los cuatro anteriores incidiendo en el razonamiento y argumentación de las respuestas, ya que el pensamiento computacional es una forma de pensar matemáticamente que no tiene sentido tratar de forma aislada.

D. Sentido estocástico

Durante este curso este sentido se enfoca principalmente con la capacidad para acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente diversas situaciones de incertidumbre y riesgo del mundo real, ya sea en la vida cotidiana, política o en contextos relacionados con las Ciencias Sociales..

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
D.1. Incertidumbre: – La probabilidad como medida de incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios: interpretaciones subjetivas, clásica y frecuentista. – Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Probabilidad condicionada e independencia entre sucesos aleatorios. Diagramas de árbol y tablas de contingencia. – Teoremas de la probabilidad total y de Bayes: resolución de problemas e interpretación del teorema de Bayes para actualizar la probabilidad a partir de la observación y la experimentación y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.	En este nivel, en el cálculo de probabilidades en experimentos simples y compuestos puede continuar en la línea de trabajo de Matemáticas I, trabajando de forma más profunda las tablas de contingencia y los diagramas de árbol ya que fomentan la comprensión de los cálculos de probabilidad en situaciones en las que tener una información sobre la ocurrencia de sucesos relacionados con otro que nos interesa estudiar nos condiciona o no la probabilidad del que es de nuestro interés, trabajando por lo tanto la probabilidad condicional. A veces no conocemos la probabilidad de lo que va a pasar en cuanto a un suceso, pero sí la probabilidad de que eso ocurra bajo determinadas condiciones y ello es lo que permitirá comprender mejor el resultado del teorema de la probabilidad total.Puede ser conveniente un apoyo gráfico (tipo de diagramas de Venn) para visualizar los teoremas. Se centra la probabilidad sobre todo en su interpretación subjetiva y clásica. Esto, junto con el trabajo de álgebra de sucesos permitirá acercar al alumnado a la comprensión del teorema de la probabilidad total y de Bayes. Algunas situaciones didácticas que pueden trabajarse en este apartado pueden ser ejercicios de canales y laberintos y aparato de Galton, ensayos de Bernouilli, así como problemas en los que se trabaje la fiabilidad de una muestra o de una afirmación en función de los datos empíricos registrados. En Godino, Batanero y Cañizares (1987) se pueden encontrar otros tipos de situaciones didácticas para el desarrollo de estos saberes. La representación de la información en un diagrama de árbol es una herramienta fundamental para introducir y justificar teoremas importantes de probabilidad (Total y Bayes) y que el alumnado pueda resolver este tipo de situaciones de proporcionalidad condicionada (de Hierro, Batanero y Beltrán-Pellicer, 2018). Algunas de las dificultades del alumnado referidos a la comprensión del teorema de Bayes son por un lado, la confusión que les produce diferenciar entre probabilidad conjunta, probabilidad simple, probabilidad condicional a posteriori y probabilidad condicional a priori, si bien estas dificultades son menores en aquel alumnado que es capaz de identificar los datos del problema y situarlos en un diagrama de árbol correcto que les facilita una correcta construcción de la partición muestral; por otro lado, pueden arrastrar errores de operatoria proporcional cometiendo errores del tipo calcular el 20% del 30%. En Batanero, Ortiz y Serrano (2007) podemos encontrar un listado más exhaustivo de las dificultades del alumnado.
D.2. Distribuciones de probabilidad: – Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución. Distribuciones binomial y normal. – Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Cálculo de probabilidades asociadas mediante herramientas tecnológicas. – Aproximación de la distribución binomial por la distribución normal.	Conectar las distribuciones empíricas con las de probabilidad como modelo teórico no es un concepto sencillo. En Secundaria ya se propone trabajar con actividades que permitan el acercamiento con variables discretas como por ejemplo el lanzamiento de dos dados y observar la suma de sus caras o bien lanzar cuatro monedas y contar el número de caras que ofrece un modelo binomial de probabilidad (https://www.geogebra.org/m/pmxXRa55). Para aclarar el concepto de sí una situación responde a un modelo BInomial o no, pueden trabajarse actividades de razonamiento como las queaparecen enhttps://nrich.maths.org/13892 Para acercarnos a la variable continua se pueden recoger datos de pesos o alturas del INE, (o cualquier otra variable continua de otras bases de datos que sean accesibles) y mediante tratamiento informático estudiar la forma de su distribución para aproximarnos al modelo de la Normal y desde ahí trabajar el cálculo de probabilidades con ella. El uso de herramientas informáticas permite dar más espacio a la interpretación razonada de las distribuciones y sus parámetros y no conviene por lo tanto priorizar la inversión de tiempo en la realización mecánica de operaciones únicamente. En el primer curso ya se aconsejó el uso de simulaciones y herramientas como https://www.geogebra.org/m/ueaxe2dy en la que se muestra de forma muy visual el porqué una distribución Binomial en determinadas condiciones puede aproximarse por una distribución Normal. Es en este momento, cuando partiendo de ahí, se puede formalizar un poco más el procedimiento de cálculo de probabilidades insistiendo en la diferencia entre un cálculo en un punto discreto (variable discreta) y su aproximación por un intervalo pequeño que lo abarca (variable continua).
D.3. Inferencia: – Selección de muestras representativas. Técnicas de muestreo. – Estimación de la media, la proporción y la desviación típica. Aproximación de la distribución de la media y de la proporción muestrales por la normal. – Intervalos de confianza basados en la distribución normal: construcción, análisis y toma de decisiones en situaciones contextualizadas. – Herramientas digitales en la realización de estudios estadísticos.	Para el desarrollo del sentido estocástico se trabajó de forma conjunta el desarrollo del pensamiento estadístico y probabilístico. El muestreo establece claramente un puente entre ellos, por lo que es importante que el alumnado comprenda la importancia del cómo es o no de representativa una muestra y cómo influye el proceso de selección, los errores que pueden originarse en la interpretación de los datos obtenidos de esa muestra, la fiabilidad de las interpretaciones y cálculos que se pueden hacer, ya que esto es la base de la inferencia estadística, y ayuda a comprender cómo se comporta la distribución de la media y proporción muestrales. En el primer curso ya se aconsejaba trabajar por grupos con distintos tipos de muestreo para estudiar sus características, por lo que en este curso se pueden formalizar estas conclusiones. Es muy útil en este apartado comenzar (o seguir) a trabajar con applets interactivos que permiten que el alumnado participe en el muestreo de forma que antes de comenzar con la inferencia podamos controlar un poco las creencias erróneas que pueda todavía arrastrar el alumnado como la insensibilidad al tamaño de la muestra junto con la ilusión de control sobre procesos aleatorios, y también valorar la necesidad de los datos y su variabilidad de forma que sea más cercana la comprensión al concepto de distribución, que no es un aspecto sencillo para el alumnado, ya que en la inferencia se manejan la distribución de la población (el peso de las personas), la distribución de la muestra (el peso de 100 personas) y la distribución del estadístico (como se comportan todas las medias de todas las muestras de 100 personas) .Esta página puede ayudar como recurso para

	trabajar las tres distribuciones con casos de datos propuestos:https://www.rossmanchance.com/applets/2021/sampling/OneSample.html, haciendo un acercamiento a la lógica del proceso de inferencia previa a la del cálculo formal. Puede hacerse uso también de diferentes recursos enhttps://www.geogebra.org/search/inferencia. Se sugiere la lectura de (Batanero et al., 2019) para profundizar en aspectos didácticos del muestreo, una idea estocástica fundamental, como las principales dificultades del alumnado asociadas a este saber y ejemplos de tareas propuestas para trabajar su comprensión en el aula.

E. Sentido socioafectivo

El desarrollo de esta competencia conlleva identificar y gestionar las propias emociones en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, reconocer las fuentes de estrés, ser perseverante en la consecución de los objetivos, pensar de forma crítica y creativa, crear resiliencia y mantener una actitud proactiva ante nuevos retos matemáticos. Asimismo, implica mostrar empatía por los demás, establecer y mantenerrelaciones positivas, ejercitar la escucha activa y la comunicación asertiva en el trabajo en equipo y tomar decisiones responsables. Para propiciar el trabajo efectivo en estos aspectos es necesario establecer un clima en el aula en el que se favorezcan el diálogo y la reflexión, se fomente la colaboración y el trabajo en equipo, y se valoren los errores y experiencias propias y de los demás como fuente de aprendizaje.

Se debe también fomentar la ruptura de estereotipos e ideas preconcebidas sobre las matemáticas asociadas a cuestiones individuales como, por ejemplo, las relacionadas con el género o con la existencia de una aptitud innata para las matemáticas. Con este objetivo se propone, por ejemplo, el uso de actividades que den lugar a un aprendizaje inclusivo (por ejemplo, tareas ricas o actividades de “suelo bajo y techo alto”). Por otra parte, hay que incluir oportunidades para que el alumnado conozca las contribuciones de las mujeres, así como de distintas culturas y minorías, a las matemáticas, a lo largo de la historia y en la actualidad.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
E.1. Creencias, actitudes y emociones: – Destrezas de autogestión encaminadas a reconocer las emociones propias, afrontando eventuales situaciones de estrés y ansiedad en el aprendizaje de las matemáticas. – Tratamiento y análisis del error, individual y colectivo como elemento movilizador de saberes previos adquiridos y generador de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas.	La resolución de un problema significa comprometerse con la solución de una tarea para la que no se conoce previamente el método de solución. Al abordar los problemas, los estudiantes tienen que razonar matemáticamente, emplear sus conocimientos matemáticos y en ocasiones, adquirir nociones matemáticas nuevas. A través de la resolución de problemas se desarrollan actitudes básicas para el trabajo matemático: perseverancia, flexibilidad, estrategias personales de autocorrección y de superación de bloqueos, confianza en las propias posibilidades, iniciativa personal, curiosidad y disposición positiva a la reflexión sobre las decisiones tomadas y a la crítica razonada, planteamiento de preguntas y búsqueda de la mejor respuesta, aplicando lo aprendido en otras situaciones y en distintos contextos, interés por la participación activa y responsable en el trabajo en pequeño y gran grupo. Observamos que para el desarrollo de estas destrezas no se trata, por tanto, de que los estudiantes reciban instrucción directa sobre educación emocional, ni sobre los componentes de la dimensión afectiva en matemáticas (valores, creencias, actitudes y emociones) y sus diferencias, sino que en la práctica diaria de clase diseñada por el profesorado ponga en juego distintas estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo. Por ejemplo: favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas; revisar los pasos seguidos en la resolución de una tarea para plantearse si hay errores o si lo obtenido puede emplearse en otras situaciones; revisar las distintas resoluciones obtenidas, enfatizando en que no hay una única manera de resolver un problema; identificar en las tareas cuáles son los aspectos clave para su resolución y prever qué tipo de andamiaje ofrecer a los estudiantes en caso de bloqueo, etc.
E.2. Toma de decisiones, inclusión, respeto y diversidad: – Destrezas para evaluar diferentes opciones y tomar decisiones en la resolución de problemas. – Destrezas sociales y de comunicación efectivas para el éxito en el aprendizaje de las matemáticas. – Valoración de la contribución de las Matemáticas y el papel de matemáticos y matemáticas a lo largo de la historia el avance de las Ciencias Sociales.	El trabajo en pequeños grupos heterogéneos, de tres o cuatro alumnos o alumnas, a ser posible conformados de manera aleatoria, hace que el alumno o la alumna no se tenga que afrontar solo al problema que se plantea y se sienta más seguro al expresar sus ideas en condiciones de igualdad. El objetivo aquí es fomentar la interacción y la conversación entre iguales para discutir diversas formas de abordar un problema y llegar a acuerdos. Cuando la cultura de aula incorpora de forma natural y cotidiana estas interacciones, las estrategias personales que pueda tener cada alumno o alumna de forma espontánea se ven ampliadas y enriquecidas, al mismo tiempo que obliga a utilizar un lenguaje matemático (en sentido amplio, atendiendo a sus diversos registros, desde el lenguaje oral hasta el simbólico-numérico, pasando por diagramas y esquemas) que comprendan los compañeros. En definitiva, hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. El profesorado debe plantear preguntas abiertas al alumnado, preguntas ricas, que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás y a buscar recursos en el aula que necesiten para resolver el problema. También es vital dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. No es suficiente con lanzar la pregunta y acto seguido, a los pocos segundos, desvelar la respuesta. Las matemáticas son una actividad característica de la especie humana, al igual que la literatura, el arte, la física o la música. Las matemáticas tienen un pasado, un presente y un futuro, y es importante que el alumnado sea consciente de la naturaleza viva de las matemáticas. Las matemáticas no son algo acabado, sino que, a lo largo de la historia, con la contribución de matemáticos y matemáticas del mundo se han ido construyendo las ideas matemáticas que hoy conocemos y que se encuentran en la base de todas las ciencias. Conocer la Historia de la Matemática conlleva, por una parte,

	entender mejor el desarrollo y motivación de conceptos e ideas en matemáticas, que en ocasiones aparecen desconectados entre sí dentro del currículo. Por otra parte, puede contribuir a cambiar la percepción del alumnado hacia la asignatura, haciéndola más cercana y coherente. Conocer su historia implica también comprender mejor el papel de las matemáticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, y les da un contexto. Por último, una perspectiva histórica nos permite abordar cuestiones como las dificultades de acceso a las matemáticas por parte de la mujer y otras minorías a lo largo de los siglos. Se puede hacer un primer acercamiento a la historia de las matemáticas procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. En este sentido se pueden encontrar recursos, como el monográfico de Barbin et al. (2018), en la página web Convergence de la MAA (https://www.maa.org/press/periodicals/convergence) o en la web de nrich (https://nrich.maths.org/9443). También es posible encontrar otros materiales como lecturas o audiovisuales de contenido matemático, tanto de ficción como no ficción (podcasts, documentales, entrevistas, etc).

IV. Orientaciones didácticas y metodológicas

IV.1. Sugerencias didácticas y metodológicas

Las Matemáticas en el primer y segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales pretenden continuar con el trabajo realizado en Ed. Secundaria. Por tanto, se promueve la resolución de problemas como enfoque metodológico, puesto que permite la creación de un escenario adecuado para el quehacer matemático. Dicho enfoque favorece el razonamiento y la investigación especialmente enfocados a la interpretación y análisis de cuestiones de las Ciencias Sociales. Adicionalmente, el enfoque basado en la resolución de problemas debe favorecer la investigación. Este tipo de tareas exigen comprensión y autorregulación del propio proceso cognitivo, puesto que el alumnado debe analizar las diferentes estrategias o caminos de resolución, lo que implica la toma de decisión y, por tanto, se favorece la autonomía del alumnado. Un enfoque próximo a la resolución de problemas centra el interés en el proceso y no en el resultado. Este hecho exige una reflexión sobre la visión acerca del error, donde se concibe como parte fundamental del proceso de aprendizaje. En dicho proceso, el alumnado deberá poner en juego capacidades matemáticas como modelizar, interpretar resultados, formular conjeturas, argumentar y razonar inductiva y deductivamente, utilizar de diferentes representaciones, comunicar los resultados, y establecer conexiones entre diferentes saberes matemáticos y con saberes de otras disciplinas.

Además, la resolución de problemas proporciona oportunidades al profesorado para dar respuesta a la dimensión afectiva. El objetivo en el aula de matemática no es la inhibición de las emociones, tales como la frustración, sino dar oportunidades a través de la resolución de problemas de, en primer lugar, identificarlas y, en segundo lugar, de proporcionar herramientas para su gestión. Por tanto, la resolución de problemas resulta un escenario idóneo para dar respuesta a la competencia socioafectiva. En relación con el papel del profesorado, este enfoque se desliga de las orientaciones tradicionales en las que actúa como mero transmisor de conocimientos, adquiriendo un rol de guía en el proceso de aprendizaje del alumnado.

Un aspecto importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son los recursos. En cuanto a la enseñanza de las matemáticas, Arce et al. (2019) distinguen entre recursos físicos (libros de texto, cuaderno del alumnado, pizarra, materiales manipulativos, lecturas de contenido matemático y prensa), recursos digitales (pizarra digital interactiva, software informático matemático específico, apps educativas, blogs, recursos audiovisuales como cine, películas, series, vídeos…) y recursos transversales (juegos matemáticos, historia de la matemática como recurso didáctico, el propio entorno y los paseos matemáticos…).

La programación didáctica surge atendiendo al currículo y sus orientaciones y debería ser susceptible de adaptación según el progreso del alumnado. El libro de texto es un recurso empleado por un gran número de docentes y estudiantes en la práctica educativa. La utilización de este recurso puede ser diversa: como manual de consulta para el alumnado, como repositorio de ejercicios y problemas, como guion para el profesorado en sus clases, etc. No obstante, un empleo excesivo de este recurso puede conllevar la no consideración de las directrices curriculares. Por un lado, seguir linealmente una estructura habitual de los textos donde se presentan en primer lugar los saberes matemáticos (conceptuales y/o procedimentales) seguidos de ejemplos resueltos y una serie de ejercicios para complementar el trabajo de la técnica presentada justo anteriormente está lejos de situar la resolución de problemas como eje vertebrador de las matemáticas escolares y detonante de la construcción de los objetos matemáticos. Por otro, el formato escrito de los textos puede presentar carencias en cuanto al uso de otros materiales manipulativos o recursos anteriormente citados. El cuaderno del estudiante es un recurso relevante y natural en el aula de matemáticasdel que no se suele aprovechar todo su potencial (Arce, 2018).Puede tener utilidad para llevar a cabo una evaluación formativa ya que en él se pueden recoger evidencias de aprendizaje del alumnado y observar cómo éste refleja los procesos de pensamiento y su evolución a lo largo del tiempo. Además, también se sugieren emplear lecturas con contenidos matemáticos, que pueden comprender desde fragmentos de libros de divulgación matemática, novelas de contenido matemático o artículos de prensa que ponen en relieve la cantidad de información expresada en lenguaje matemático que la ciudadanía y, por tanto, el alumnado, tiene que interpretar y mostrar una actitud crítica hacia la misma.

Adicionalmente, los recursos digitales tienen que promover la posibilidad de analizar, experimentar y comprobar la información, o ser usados como instrumentos de cálculo. Existen recursos en los que nos podemos apoyar como la pizarra digital, la calculadora o el software específico (como GeoGebra, Derive, hojas de cálculo, BlocksCAD, Scratch…). También resulta interesante identificar páginas web, como las citadas a lo largo de las orientaciones para la enseñanza, que poseen diferentes actividades para llevar al aula (https://nrich.maths.org/, https://illuminations.nctm.org/,https://nzmaths.co.nz/,https://www.geogebra.org/materials, http://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_5_correg.html, entre muchas otras…). En la actualidad existen redes sociales, como Youtube o Instagram, en las que hay múltiples canales de videos de corta duración en los que se presentan ciertos saberes de matemática escolar o propios de divulgación matemática. Estos recursos, especialmente los de canales con finalidad divulgativa y de calidad contrastada, pueden proporcionar una manera atractiva e interesante de introducir y contextualizar en la sociedad y en la ciencia los contenidos matemáticos que se abordan en clase, complementando el trabajo realizado en el aula y facilitando realizar conexiones con otras materias o con otros saberes matemáticos. No obstante, el profesorado debe ser muy cuidadoso en la elección de los mismos, ya que muchos videos de matemáticas escolares poseen argumentos poco precisos o presentan procedimientos incorrectos (Beltrán-Pellicer et al., 2018) o no añaden valor más allá de cambiar la tiza por una pizarra digital. En cualquier caso, el uso de los recursos digitales tiene que integrarse de forma natural en el aula, suponiendo su inclusión una oportunidad de mejora para el proceso de instrucción.

Otro aspecto al que debe responder el enfoque metodológico es la atención a la diversidad desde un punto de vista inclusivo. En este sentido, el trabajo en equipo permite enriquecer y dar respuesta a las dificultades personales a través de la puesta en común y reflexión sobre las diferentes estrategias. Siguiendo a Lilijedahl (2021), la generación de grupos de manera aleatoria no solamente derriba las barreras sociales, sino que también aumenta la movilidad del conocimiento. En relación con la dimensión afectiva, se identifican consecuencias positivas al reducir el estrés y aumentar el entusiasmo por las matemáticas. El trabajo en grupo debe garantizar la puesta en común de ideas donde se compartan los significados personales construidos y estrategias diseñadas. Por tanto, el interés recae en la interacción como medio para construir conocimiento matemático situando el foco en el proceso y no en el producto final. Por otro lado, se puede dar respuesta a la atención del alumnado a través del uso de diferentes representaciones de conceptos, procedimientos e información matemática que facilitan a visualizar las ideas matemáticas y contrastar la validez de las repuestas. Para ello, los diferentes recursos citados pueden resultar de ayuda al alumnado a superar las posibles dificultades u obstáculos personales.

Desde la administración educativa y otras instituciones u organizaciones, se promueven actividades que alimentan la curiosidad del alumnado, tanto del que participa en ella como el que vive en el entorno de aula, donde se pueden dar a conocer estas propuestas y pueden formar parte de las secuencias didácticas. En Aragón, cabe mencionar el programa educativo Conexión Matemática organizado a raíz del convenio de colaboración entre el Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón y la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas (SAPM). Otras actividades de popularización y divulgación de las matemáticas con una finalidad educativa y en las que pueden participar los estudiantes de Secundaria de manera activa, se organizan en torno a días señalados como el “Día escolar de las matemáticas” (12 de mayo) o el “Día internacional de las matemáticas” (14 de marzo). Estas actividades deben ser propuestas para todo el alumnado. No obstante, también pueden suponer un estímulo valioso en el caso de alumnado con altas capacidades. En este sentido, también existen concursos matemáticos, como las Olimpiadas de Matemáticas, o actividades, como el Taller de Talento Matemático, organizado por profesorado tanto de enseñanza secundaria como de la Universidad de Zaragoza. Otras actividades como concursos de microrrelatos o de fotografía matemáticos ofrecen oportunidades de conexión con otras materias. Finalmente, para apreciar las matemáticas desde un punto de vista cultural, se sugiere la realización de "paseos matemáticos" y también es interesante mencionar las exposiciones del Museo de Matemáticas en Aragón.

IV.2. Evaluación de aprendizajes

En primer lugar, las orientaciones metodológicas descritas promueven como actividad principal la resolución de problemas, acompañado de un clima participativo y abierto que permita al alumnado poner en común y valorar las estrategias de sus compañeros. Bajo este prisma, la evaluación formativa da respuesta al enfoque metodológico sugerido, puesto que persigue apoyar el aprendizaje del alumnado proporcionando al profesorado evidencias para diseñar, implementar y adaptar secuencias didácticas. Si reducimos la evaluación a la obtención de una calificación donde el interés queda reducido a emitir un valor numérico exclusivamente a través de pruebas individuales cerradas, entonces se puede caer en la penalización del propio proceso.

En segundo lugar, la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado será continua, formativa y diferenciada. Arce et al. (2019) señalan que la evaluación formativa adquiere un carácter interactivo y está integrada en el proceso de instrucción. Este enfoque supera consideraciones previas de este tipo de evaluación supeditadas a la realización de cuestionarios o exámenes parciales a lo largo de un curso y en momentos puntuales de evaluación. Esta evaluación formativa denominada "evaluar para aprender" tiene como finalidad que el estudiante participe activamente en el proceso de aprendizaje y se responsabilice del mismo. Este tipo de evaluación conlleva cambios significativos en los resultados obtenidos por el alumnado. Como este tipo de evaluación se sitúa perfectamente alineada con la metodología considerada, no es de extrañar que una actividad sea establecer un diálogo efectivo en el que profesorado se sitúe como guía de aprendizaje. El enriquecimiento de los procesos a través de las intervenciones de los compañeros tanto en pequeños grupos como con el grupo completo, conlleva que este rol también se vea adoptado por el propio alumno o la propia alumna. Otro aspecto relevante de este enfoque es la comunicación efectiva y clara sobre los objetivos y los criterios de evaluación, así como de la situación del alumnado a lo largo del proceso de aprendizaje en relación con éstos. Al concebir el aprendizaje como un proceso y no como un resultado, el profesorado tiene que dar respuesta a las diferentes dificultades en el aprendizaje con la finalidad de superarlas.

Bajo este enfoque de evaluación, tiene una mención especial tanto la autoevaluación como la evaluación por pares, pues resultan actividades fundamentales de la evaluación formativa (Arce et al., 2019). Estas actividades fomentan la reflexión del alumnado sobre su propio aprendizaje. Para alcanzarlo, un aspecto fundamental es que los objetivos de aprendizaje sean conocidos por el alumnado. En el caso de la evaluación por pares, Giménez (1996) indica que es recomendable utilizar plantillas donde se incluyan los objetivos y criterio de evaluación y se asigne a cada uno de ellos una valoración codificada como acierto (B), error (E), identificación parcial (P) o sin respuesta y dejar un espacio para que el alumnado incluya observaciones o comentarios sobre sus valoraciones. Por su parte, la autoevaluación tiene que ayudar al alumnado a ser consciente de su proceso de aprendizaje dando lugar a la posibilidad de que emerjan las dificultades de una manera consciente y exista la posibilidad de dar respuesta a las mismas. De esta manera, se favorece la autorregulación del alumnado, así como su autonomía. Como posibles ideas, Boaler (2016) presenta algunos ejemplos de tareas de autoevaluación que facilitan dicha regulación de los aprendizajes: (a) tareas abiertas que invitan a la reflexión sobre las ideas que han aprendido y nombrar los aspectos más difíciles, (b) actividades más cerradas en las que se presentan en una tabla la lista de objetivos para que se identifiquen los que han sido alcanzados. En definitiva, se trata de planificar la recogida de evidencias de aprendizaje que permita al profesorado tener información sobre el estado en el que se sitúa cada alumno o alumna en lugar de un cuaderno de puntuaciones.

Finalmente, se debe dar la importancia requerida a la evaluación inicial y de diagnóstico, que permite al profesorado ajustar la planificación de las tareas a la diversidad del aula e identificar posibles dificultades que podrían surgir durante el proceso de enseñanza. En este sentido, puede ser interesante la formulación de preguntas en el aula o tareas concretas que aporten información al profesorado de una manera sencilla y aproximada sobre el conocimiento previo que necesita para abordar el proceso de enseñanza planificado.

IV.3. Diseño de situaciones de aprendizaje

Un punto de partida interesante para reflexionar sobre el diseño de situaciones de aprendizaje es describir un proceso que ayude o guíe al profesorado a tomar decisiones durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, se definen una serie de fases que pueden ser susceptibles de ser adaptadas a las necesidades identificadas, pero que sirven para caracterizar una fotografía general del desarrollo del proceso. En el siguiente apartado, junto con la descripción de situaciones en las orientaciones de enseñanza, se muestran de manera más concreta ejemplos de situaciones que son susceptibles de ser incluidas en las fases descritas.

Primera fase. El docente o la docente observan el conocimiento previo del alumnado acerca del contenido a aprender, identificando aspectos esenciales como el lenguaje que moviliza, el razonamiento capaz de articular, etc. Esta información es fundamental para adaptar las siguientes fases, de modo que se evite destinar tiempo hacia los saberes ya aprendidos.

Segunda fase. Tras la selección previa de los materiales y diseño de tareas, se ponen en práctica las mismas. Estas tareas generalmente son breves y suelen ser cuestiones que supongan el punto de partida para que el alumnado comience a investigar. Los conceptos, propiedades, representaciones, etc. emergen y configuran la red de relaciones del nuevo nivel de razonamiento.

Tercera fase. Una vez que el alumnado ha tenido la oportunidad de explorar la situación planteada, se invita a que exprese los descubrimientos sus indagaciones. No solo es importante que el alumno o alumna comunique sus ideas de manera escrita sino también oral, dando la oportunidad al alumnado de intercambiar sus resultados a través de la interacción. Estas puestas en común permiten al profesorado revisar el lenguaje que el alumno o alumna está movilizando. Las interacciones permiten al alumnado organizar sus ideas, articulando los conceptos o propiedades que van emergiendo. El intercambio de ideas favorece el enriquecimiento personal ya que se da la oportunidad de que aprendan unos de otros. Esta fase tiene carácter transversal, pudiendo organizar charlas de aula a modo de puestas en común en cualquier momento de la actividad. Es importante remarcar que en esta fase no se realizan explicaciones de carácter formal, sino que se trata de ayudar a progresar en el uso de un lenguaje cuidadoso y preciso.

Cuarta fase. Las tareas de esta fase son más complejas que en la segunda fase. No se trata de la repetición de tareas realizadas en fases anteriores ni de meros ejercicios, sino que se trate de tareas que combinen lo que se ha ido aprendiendo para explorar nuevos caminos. Las tareas de esta fase van a completar la red de conexiones entre conceptos y propiedades que se empezó a crear en la resolución de las tareas de fases anteriores. En esta fase se atiende de manera directa a la inclusión, al estar constituida por tareas que permiten diferentes caminos para su resolución, ya que exigen reflexiones más profundas y dan la oportunidad de construir el andamiaje necesario para llegar al techo alto. Por tanto, tanto en la segunda como en la tercera fase las tareas que se presentan se corresponden con tareas de suelo bajo en su mayoría.

Quinta fase. Esta última fase está reservada para que el profesorado recoja todo lo que ha ido apareciendo e institucionalice el conocimiento. Por tanto, el docente o la docente sintetizan lo aprendido y lo conectan con otros contenidos ya conocidos por el alumnado. En esta fase también se puede contemplar intervenciones por parte del alumnado, aunque el mayor peso queda sujeto a la intervención y la actuación docente.

IV.4. Ejemplificación de situaciones de aprendizaje

Ejemplo de situación de aprendizaje [1]: Matemática financiera y de consumo

Para el estudio de la matemática financiera en 1º de Bachillerato, se propone una metodología no expositiva en la que el alumnado estudia diferentes productos financieros a través de la indagación.

Se plantea la exploración de varias situaciones de consumo que tendrán que analizar y sobre las que deberán tomar decisiones. Las matemáticas, aportarán las herramientas necesarias para el análisis de los productos financieros. Para ello, necesitarán aplicar sus conocimientos y destrezas, así como sus intereses particulares y sus ideas concebidas a través de experiencias propias o cercanas. Es importante en el contexto que nos encontramos, plantear preguntas de respuesta abierta y subjetiva. Como parte de su formación integral, tendrán que aprender que para tomar una decisión hay que sopesar más de un factor y que las circunstancias personales pueden ser determinantes en las elecciones. La única condición que se les va a poner, es que todo esté bien justificado y con razonamientos fundados.

Como futuros consumidores, necesitan desarrollar el espíritu crítico, además de conocer los derechos que a todo consumidor amparan.

Introducción y contextualización:

Se trata de una situación de aprendizaje dirigida a 1º de bachillerato de la modalidad Humanidades y Ciencias Sociales.

Como conocimientos previos, necesitarán algunos saberes relacionados con el sentido numérico como el cálculo de porcentajes y el aumento porcentual (cálculo de intereses). También es importante que estén familiarizados con el uso de hojas de cálculo.

El trabajo que se va a proponer, sugiere organizar a la clase en grupos de unas cuatro personas para trabajar en pequeño grupo y por parejas para las actividades con ordenador. También se proponen reflexiones individuales y debates en gran grupo.

Objetivos didácticos:

Resolución de problemas y/o situaciones relacionados con las finanzas personales y la interpretación de información sobre productos financieros.

Elementos curriculares involucrados:

Los conocimientos, destrezas y actitudes que se describen en los sub-bloques del saber numérico al que van dirigidos:

A.2. Sentido de las operaciones: Interpretación de la información numérica en documentos de la vida cotidiana.

A.4. Educación financiera. Resolución de problemas relacionados con la educación financiera (cuotas, amortización, intereses, préstamos…) con herramientas tecnológicas.

Respecto a las competencias específicas, esta situación moviliza las nueve competencias específicas de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, sin excepción. Sin embargo, cabe destacar su especial contribución a las que hacen referencia a la resolución de problemas (CE.MCS.1, CE.MCS.2), a la representación y comunicación de las ideas (CE.MCS.7, CE.MCS.8) y las que atienden al plano socio afectivo (CE.MCS.9)

Conexiones con otras materias:

Es clara la conexión que este bloque de saberes tiene con la economía y el emprendimiento. También tiene relación con la tecnología y a su vez requiere destreza comunicativa.

Descripción de la actividad:

La situación de aprendizaje general se ha organizado en tres partes (o sub-situaciones) distintas: capitalización del interés, plan de pensiones y amortización de un préstamo. Cada una de ellas requeriría un mínimo de dos sesiones lectivas. Por tanto, el diseño de la situación general es amplio, abarcando distintas competencias y saberes que aparecen relacionados en cada una de las sesiones. Es por eso que se combinan a lo largo de estas tres partes que presentamos a continuación, las diferentes fases mencionadas en el anterior apartado IV.3. Diseño de situaciones de aprendizaje.

<u>Primera parte. Capitalización del interés.</u>

Se presentan dos tablas. Ambas describen la evolución de 10000€ depositados en un banco a un tipo de interés del 4% anual, pero las condiciones de ambos depósitos son diferentes porque no arrojan el mismo saldo final. Evidentemente es más beneficiosa la segunda oferta, pero ¿cuál es el motivo?

En este primer momento, se puede comprobar el dominio del alumnado respecto a los conocimientos previos necesarios para desarrollar esta primera parte y realizar las adaptaciones pertinentes a las posteriores tareas de toda la situación. El material debe ser en formato papel para que puedan hacer anotaciones, lo cual contribuye a la evaluación formativa. Pueden utilizar la calculadora para realizar las comprobaciones que consideren oportunas.

Cada vez que se reparta material para su análisis, es recomendable hacer primero un estudio individual de unos 5 minutos para posteriormente poner en común en pequeños grupos de unas cuatro personas. También puede haber una puesta en común de todo el grupo.

Oferta 1.1:

fecha	capital	interés %	Capital final
01/01/2022	10.000,00		€ 10.000,00
01/02/2022	10.000,00		€ 10.000,00
01/03/2022	10.000,00		€ 10.000,00
01/04/2022	10.000,00	4	€ 10.100,00
01/05/2022	10.100,00		€ 10.100,00
01/06/2022	10.100,00		€ 10.100,00
01/07/2022	10.100,00	4	€ 10.201,00
01/08/2022	10.201,00		€ 10.201,00
01/09/2022	10.201,00		€ 10.201,00
01/10/2022	10.201,00	4	€ 10.303,01
01/11/2022	10.303,01		€ 10.303,01
01/12/2022	10.303,01		€ 10.303,01
01/01/2023	10.303,01	4	€ 10.406,04

Oferta 2.1:

fecha	capital	interés %	capital final
01/01/2022	10.000,00		€ 10.000,00
01/02/2022	10.000,00	4	€ 10.033,33
01/03/2022	10.033,33	4	€ 10.066,78
01/04/2022	10.066,78	4	€ 10.100,33
01/05/2022	10.100,33	4	€ 10.134,00
01/06/2022	10.134,00	4	€ 10.167,78
01/07/2022	10.167,78	4	€ 10.201,67
01/08/2022	10.201,67	4	€ 10.235,68
01/09/2022	10.235,68	4	€ 10.269,80
01/10/2022	10.269,80	4	€ 10.304,03
01/11/2022	10.304,03	4	€ 10.338,38
01/12/2022	10.338,38	4	€ 10.372,84
01/01/2023	10.372,84	4	€ 10.407,42

Tras las reflexiones individuales y en pequeño grupo, se pueden sacar las conclusiones acerca de por qué ambos depósitos a un mismo tipo de interés fijo arrojan saldos finales levemente diferentes. El debate puede enriquecerse (o no) dependiendo de las aportaciones de la clase, a través de preguntas: ¿Cuál sería la mejor oferta? ¿Cuánto es el 4% de 10000? ¿En qué momentos del año se aplican los intereses? Si el Interés nos lo hubieran aplicado solo al finalizar el año, el resultado sería… ¿mejor o peor? ¿Y si el interés se aplicara de forma bimestral? ¿Qué interés se ha aplicado el 01/04/22 en la primera oferta? ¿Y el 01/02/22 en la segunda?

Son solo ejemplos de preguntas, se pueden hacer muchas más para reconducir su investigación si lo necesitan. Por ejemplo, una buena secuencia en sus razonamientos podría ser:

- El interés es anual, pero depende de la cantidad de veces que se aplica. No es lo mismo un interés anual del 4% arrojado trimestralmente que el mismo interés arrojado mensualmente.

- Para calcular el interés en cada periodo, tienen que dividir el interés anual entre el nº de periodos en un año (4 en la oferta 1.1 y 12 en la oferta 2.1).

- Encontrar una estrategia para el cálculo de la última columna.

Tras esta primera puesta en común de resultados, se introduce la definición de la TAE. Para ello, se invita a calcular el interés final (si no lo han obtenido ya en su indagación). Es habitual que no encuentren forma de obtener el diferencial utilizando los resultados 10000 y 10406,04. Pero hay que indicarles la obviedad del resultado siendo el dato inicial una potencia de 10. ¿Y si no lo fuera? ¿Sabrían calcularlo? Se dan las indicaciones pertinentes.

Estamos ahora en este punto:

Oferta 1.1: TAE 4’0604%

Oferta 2.1: TAE 4’0742%

Se presentan dos nuevas tablas en las que se simulan las dos situaciones anteriores, pero con comisiones de apertura:

Oferta1.2

fecha	capital	interés %	comisión	Capital final
01/01/2022	10.000,00		2,00 €	€ 9.998,00
01/02/2022	9.998,00			€ 9.998,00
01/03/2022	9.998,00			€ 9.998,00
01/04/2022	9.998,00	4		€ 10.097,98
01/05/2022	10.097,98			€ 10.097,98
01/06/2022	10.097,98			€ 10.097,98
01/07/2022	10.097,98	4		€ 10.198,96
01/08/2022	10.198,96			€ 10.198,96
01/09/2022	10.198,96			€ 10.198,96
01/10/2022	10.198,96	4		€ 10.300,95
01/11/2022	10.300,95			€ 10.300,95
01/12/2022	10.300,95			€ 10.300,95
01/01/2023	10.300,95	4		€ 10.403,96

Oferta 2.2

fecha	capital	interés %	comisión	capital final
01/01/2022	10.000,00		10,00 €	€ 9.990,00
01/02/2022	9.990,00	4		€ 10.023,30
01/03/2022	10.023,30	4		€ 10.056,71
01/04/2022	10.056,71	4		€ 10.090,23
01/05/2022	10.090,23	4		€ 10.123,87
01/06/2022	10.123,87	4		€ 10.157,61
01/07/2022	10.157,61	4		€ 10.191,47
01/08/2022	10.191,47	4		€ 10.225,44
01/09/2022	10.225,44	4		€ 10.259,53
01/10/2022	10.259,53	4		€ 10.293,73
01/11/2022	10.293,73	4		€ 10.328,04
01/12/2022	10.328,04	4		€ 10.362,47
01/01/2023	10.362,47	4		€ 10.397,01

Observarán que, dependiendo de la comisión de apertura, la TAE cambia entre una y otra oferta, haciendo ahora más beneficiosa la primera de ellas.

- Oferta 1.2: TAE 4’0396%

- Oferta 2.2: TAE 3’9701%

Por norma, es obligatorio especificar la TAE de cualquier producto bancario. Con esta actividad se pretendía que el alumnado, como potencial consumidor, sea consciente de sus derechos y de la importancia que tiene estudiar bien los productos que nos ofrecen. Cuando contratamos un producto financiero es muy importante entender las condiciones, se debe invitar a reflexionar sobre esto. En el debate pueden discutirse las ventajas de inmovilizar un dinero a cambio de un beneficio, así como los riesgos que supondría una inversión en fondos complejos en los que la rentabilidad depende de factores externos.

En una segunda sesión, podrán utilizar las anotaciones que tengan para elaborar su propia hoja de cálculo. Se puede pedir realizar una simulación similar a la del día anterior. Por ejemplo, invertimos 20000 € durante un año al 3% anual con interés mensual. Calcular la TAE con y sin comisión de apertura.

No es objetivo que apliquen la fórmula del interés compuesto, es preferible que calculen dichos intereses “estirando” las fórmulas en su hoja de cálculo. Como seguramente necesitarán ayuda, se recomienda organizar el grupo en parejas para poder atender a todo el alumnado.

Identificamos en esta primera parte las cinco fases del modelo de diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3.). En la segunda fase porque la situación planteada se corresponde con una tarea que invita al alumnado a comenzar con la investigación. En la tercera fase porque el alumnado comparte los resultados obtenidos al resolver la tarea propuesta. En la cuarta fase porque en la siguiente sesión los grupos de estudiantes tratan de encontrar una estrategia de cálculo que les permita obtener el valor dado en la última columna de la tabla presentada. En la quinta fase porque, por un lado, tras la indagación realizada por el alumnado de la primera cuestión, el profesorado se reserva un espacio para especificar la TAE. Por otro, el debate organizado en torno a la resolución del enunciado planteado le permite no solo revisar e institucionalizar los conceptos trabajados, sino reflexionar sobre la necesidad de desarrollar una actitud crítica ante los productos financieros tan presentes en la vida cotidiana.

Segunda parte. Plan de pensiones.

Se describe una situación en la que se aporta una cantidad fija cada año. “El 1 de enero de 2021 contratamos un plan de pensiones al 4% de interés anual para el que tenemos que aportar 4000€ al año. Si los intereses se aplican cada año, ¿Cuánto dinero habrá en mi plan de pensiones el 1 de enero de 2027?”

De nuevo se presenta la simulación en formato papel para que estudien cómo se ha calculado. Tendrán que analizar por parejas las operaciones entre celdas y las fórmulas que se han aplicado. Por su analogía con el caso anterior, es de esperar que obtengan conclusiones más rápido.

FECHA	ANUALIDAD	ACUMULADO	INTERÉS%	CAPITAL
01/01/2022	4.000,00 €		4	4.160,00 €
01/01/2023	4.000,00 €	8.160,00 €	4	8.486,40 €
01/01/2024	4.000,00 €	12.486,40 €	4	12.985,86 €
01/01/2025	4.000,00 €	16.985,86 €	4	17.665,29 €
01/01/2026	4.000,00 €	21.665,29 €	4	22.531,90 €
01/01/2027	4.000,00 €	26.531,90 €	4	**27.593,18 €**
	24.000,00 €			

A partir del estudio de esta simulación, se puede hacer una hoja de cálculo similar suponiendo un plan de pensiones en el que se aporten 5 anualidades de 3000 € al 3'5% de interés.

Tras hacer su propia hoja de cálculo, tienen que ser capaces de explorar diferentes situaciones cambiando los datos (aportación anual e interés).

Ejemplo:

5 anualidades de 3000 € cada una

De aquí tendrán que explorar cuál de estos dos planes de pensiones es más beneficioso:

5 anualidades en el que me ofrecen 5% de interés el primer año y un 2% los restantes.

5 anualidades con un 3% de interés cada año.

En esta segunda situación es posible que se necesiten dos sesiones. Si sobra tiempo, se pueden explorar muchos tipos de planes de pensiones y que el alumnado proponga nuevos escenarios.

Cuando realizan cada simulación pueden hacer una captura de pantalla y seguir utilizando la misma plantilla, guardando las imágenes para un estudio posterior.

Situamos esta segunda parte, en la segunda y tercera fase del modelo presentado en el apartado IV.3, puesto que no se trata de una tarea más compleja, sino que busca dar al alumnado la oportunidad de autorregular su proceso aprendizaje. Aunque se corresponda con una situación distinta a la presentada en la sesión inicial, se corresponde con el conjunto de tareas breves que animan a que el alumnado investigue, las cuales constituyen la segunda fase del modelo de diseño de situaciones. Además, la temporalidad de ésta favorece que ayude al alumnado a progresar en su aprendizaje, situándose en la tercera fase de dicho modelo que será continuada en la tercera parte de la situación que presentamos a continuación.

Tercera parte. Amortización de un préstamo.

Para el estudio y el análisis de la amortización de un préstamo se presenta una simulación con seis cuotas. Además de la tabla de amortización, se incluye otra pequeña tabla con el cálculo de la cuota. Tendrán que averiguar cómo se calculan todas las celdas de ambas tablas a excepción de la cuota, de la que se hablará más adelante.

La simulación es de un préstamo personal con un interés anual del 10%. Dicho préstamo se paga mensualmente y se debe amortizar en 6 cuotas.

Capital prestado	interés anual	nº de cuotas	periodos anuales	Interés/periodo	cuota/periodo*
6000	10%	6	12	0,8333%	1.029,37 €

nº cuota	Fecha	préstamo	tipo de interés	cuota	Interés	amortizado	pendiente
1	01/01/2022	6.000,00 €	10%	1.029,37 €	50,00	979,37 €	5.020,63 €
2	01/02/2022	5.020,63 €	10%	1.029,37 €	41,84	987,53 €	4.033,10 €
3	01/03/2022	4.033,10 €	10%	1.029,37 €	33,61	995,76 €	3.037,34 €
4	01/04/2022	3.037,34 €	10%	1.029,37 €	25,31	1.004,06 €	2.033,29 €
5	01/05/2022	2.033,29 €	10%	1.029,37 €	16,94	1.012,42 €	1.020,86 €
6	01/06/2022	1.020,86 €	10%	1.029,37 €	8,51	1.020,86 €	- 0,00 €
				6.173,22 €			

Para estudiar este tipo de tablas, es posible que de nuevo haya que guiar las conclusiones a través de preguntas, por ejemplo: ¿Cómo ha calculado el Interés/periodo? ¿Qué diferencia hay entre nº de cuotas y periodos anuales? ¿Qué consecuencias tendría si el interés en lugar de ser anual fuese semestral? ¿Qué datos tendrías que cambiar en la primera tabla?

Para la última sesión, se analizarán dos préstamos diferentes utilizando una hoja de cálculo. A través de un estudio, se decide la más ventajosa para el consumo. Por ejemplo:

"Necesitamos financiación para la compra de un coche que cuesta 20000€. Tenemos dos ofertas:

Concesionario: Nos hace una rebaja de 1500 € en el precio del coche y ofrece una financiación a cuatro años del 12% anual pagada con mensualidades.

Financiera externa: Nos presta el total del precio con un interés del 7% anual con liquidación mensual, también a cuatro años.

¿Cuál de las dos eliges?"

En las dos hojas de cálculo se puede incluir el estudio de la cuota mensual.

Capital prestado	interés anual	nº de cuotas	periodos anuales	Interés/periodo	cuota/periodo
18500	12%	48	12	1,0000%	487,18 €

Capital prestado	interés anual	nº de cuotas	periodos anuales	Interés/periodo	cuota/periodo
20000	7%	48	12	0,5833%	478,92 €

Es más ventajoso el segundo préstamo, pero ¿qué pasa si nos obligan a contratar un seguro de protección de pagos de 10 € al mes? ¿Sigue siendo igual de ventajosa? ¿Cuál contratarían?

Con disyuntivas como esta podemos simular situaciones a través de las cuales tendrán que analizar las ventajas y los inconvenientes de diferentes ofertas.

*En ningún caso el objetivo de la situación será aprender fórmulas sino interpretarlas, saber dónde buscar y organizar los datos. La primera tabla en la que se calcula la cuota mensual se puede dar ya configurada, o no, a elección del profesorado y en base a los intereses y actitudes que observemos en nuestro alumnado. En este caso, el cálculo de la cuota/periodo se ha hecho con la fórmula del sistema de amortización francés (cuota fija):

$$Cuota = C \cdot \frac{(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

C = Capital prestado
r = Interés/periodo
n = Número de cuotas

Se puede profundizar todo lo que se quiera acerca del sistema de amortización francés, que establece la misma cuota a lo largo de toda la vida del préstamo (con interés fijo) frente al sistema alemán, en el que lo que permanece fijo es el capital amortizado por lo que la cuota disminuye sensiblemente a lo largo de la vida del préstamo. Todo dependerá de tiempo que se disponga y de las características del alumnado (ver apartado de atención a las diferencias individuales).

En esta ocasión, esta tercera situación se sitúa en la cuarta y quinta fase del modelo de diseño de situaciones de aprendizaje. En la cuarta porque se presenta una tarea más compleja que exige que el alumnado explore apoyándose en el andamiaje ya construido. En la quinta fase porque la presentación de las fórmulas puede ser un momento en el que el profesorado recoja todo lo que ha surgido durante la resolución, enfatizando la necesidad de interpretar la fórmula, es decir, relacionándola con las acciones realizadas durante el proceso de resolución.

Metodología y estrategias didácticas:

La metodología no expositiva encaja perfectamente en el planteamiento de esta situación de aprendizaje. Un primer objetivo es la comprensión de diversas tablas ya confeccionadas, pero sin cuestiones teóricas previas, este primer enfoque es lo que más se parece a lo que se encontrarían en un contexto real. Por ejemplo, cuando vamos a pedir un crédito, nos suelen mostrar una simulación mediante una tabla de amortización. Por otra parte, también deberán elaborar sus propias tablas en base a lo que han aprendido con su análisis. Para ello, la mayoría de las sesiones prevén el uso de hojas de cálculo.

La propuesta contempla un total de seis sesiones, en cuatro de ellas necesitarán disponer de medios informáticos con acceso a hojas de cálculo.

Atención a las diferencias individuales:

Esta situación de aprendizaje tiene techo alto, es decir, permite profundizar y avanzar en el tema todo lo que se quiera casi sin límite. Es importante tener esto en cuenta debido a las modalidades de bachillerato a las que va dirigida y en las que el alumnado puede estar cursado, o no, la asignatura de Economía en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales.

Como ejemplo, se ha incluido el estudio más profundo de los sistemas de amortización francés o alemán. También se puede proponer el análisis de situaciones más complejas como un préstamo hipotecario.

Recomendaciones para la evaluación formativa:

El desarrollo de las clases debe invitar a la participación, el pensamiento del alumnado tiene que hacerse visible a través de sus intervenciones espontáneas o a través de preguntas para conocer el estado del proceso. Las evidencias que se recogen a lo largo del desarrollo deben servir para diseñar, adaptar e implementar las sucesivas secuencias didácticas.

Para recoger las evidencias de los aprendizajes se debe llevar un registro en el que se indique en qué punto está cada estudiante. La recogida de estos datos tiene que ser un proceso ágil y cómodo, por ejemplo, codificándolo en tablas. Pueden marcarse hitos para ir evaluando la adquisición de conocimientos y destrezas, por ejemplo “describir la TAE con los datos de una tabla” o “elaborar una tabla de forma eficiente utilizando fórmulas” estos hitos no se adquieren ni se evalúan de forma cronológica y pueden ser flexibles, por ejemplo, el cálculo del interés mensual conocido el interés anual puede ser algo que adquieran en la tercera situación, aunque aparece ya en la primera. Además de las evidencias que se recojan en clase, es conveniente que realicen un documento con las capturas de las tablas que han elaborado, a estas capturas habrá que añadir las conclusiones de cada estudio realizado. Este documento será un soporte fácilmente evaluable.

Ejemplo de situación de aprendizaje [2]: ¿Es lo que pienso o es lo qué es?

Introducción y contextualización:

Se plantea una situación de aprendizaje orientada para primero de bachillerato en cualquiera de sus modalidades. Es una actividad que se enmarca en el saber sentido estocástico basándose en datos reales de cómo funciona el mundo en torno a cuestiones muy generales de las que todos opinamos y de las que a menudo recibimos mucha información a través de redes sociales y medios diversos de comunicación. Se trata primero de provocar situaciones en las que contrastar las creencias populares sobre ciertos temas de actualidad con los datos reales de fuentes fiables, despertando así tanto un espíritu crítico hacia la información recibida como el hacer patente la necesidad de las matemáticas para comprender y entender de forma más crítica la realidad y en un segundo momento de trabajar con datos reales e interpretarlos mediante técnicas estadísticas. Esta actividad se apoya en la información, sugerencias y actividades de la página web Gapminder (https://www.gapminder.org/), en páginas de aportación de datos reales y actualizados (https://www.ine.es/) y en las herramientas Excel y Geogebra.

Objetivos didácticos:

- Concienciar de la importancia del tratamiento correcto de grupos grandes de datos
- Mejorar la visión del mundo del alumnado haciéndola más realista
- Potenciar la idea de que las opiniones deben basarse en hechos
- Recoger datos y evaluar gráficos estadísticos diversos
- Confrontar la relación entre variables (correlación y causalidad)

Elementos curriculares involucrados:

- Sentido estocástico: bloque de organización y análisis de datos, inferencia
- Sentido algebraico y pensamiento computacional: bloques de modelo matemático, variable, relaciones y funciones y pensamiento computacional
- Sentido socioafectivo: tratamiento del error, individual y colectivo, como elemento movilizador de saberes adquiridos y generador de oportunidades de aprendizaje y trabajo en equipo y toma de decisiones.

Dentro de las competencias específicas, en esta situación de aprendizaje se trabajan especialmente, sin dejar de lado a las demás, las siguientes: CE.MCS.6 al descubrir la aportación que las matemáticas nos ofrecen en variados campos de la vida para poder establecer y estudiar conexiones en diferentes materias a través de objetos estadísticos unidimensionales y bidimensionales; así como CE.MCS.4 ya que a través del pensamiento computacional se van a usar modelos diversos de regresión que explican relaciones entre variables, y también CE.MCS.8 y CE.MCS.9 dado que al ser parte de la actividad en grupo han de saber escucharse unos a otros, reconsiderar sus posturas que a veces pueden no ser coincidentes desde el respeto y la aceptación del propio error, y ser capaces de comunicar las conclusiones obtenidas de forma individual y grupal usando el rigor y lenguaje matemático propio de los objetos matemáticos del sentido estocástico en el estudio de la relación entre dos variables estudiadas en una población y su intensidad.

Conexiones con otras materias:

La estadística es una herramienta destinada al servicio de interpretación y comprensión de variables de cualquier ámbito, por ello es una actividad que va conectada a la materia que pueda ser de mayor interés para el grupo: economía (si trabajamos con elementos económicos de la sociedad), geografía (demografía), biología (relación del uso de energías renovables en un país con el PIB de ese país…) y es por eso que se propone para cualquier modalidad de bachillerato.

Descripción de la actividad:

Es una actividad a desarrollar en un mínimo de 4 sesiones: una primera de acercamiento al mundo de los datos en el mundo en que vivimos, una segunda a establecer qué tipo de relaciones existen entre diferentes aspectos estudiados en una población e introducción al concepto de correlación y su posible confusión con causalidad, y las otras dos para trabajar el modelo de ajuste a la correlación.

Metodología y estrategias didácticas:

Esta secuencia requiere momentos de trabajo en parejas o grupos pequeños (hasta 4 estudiantes) y momentos de debate grupal y de explicación por parte del docente o de la docente. Necesita como mínimo un aula con ordenador y cañón de proyección, y a ser posible aula con ordenadores (uno por grupo).

1ª sesión: La primera parte de la actividad puede realizarse en grupos pequeños, y consiste en analizar y responder a las preguntas y frases que acompañan a diferentes gráficos (los gráficos pueden ser tomados de noticias distintos medios de comunicación y redes sociales); el que sigue ilustra un ejemplo de lo que podría ser:

(Respecto a la gráfica de la expectativa de vida, se puede enlazar aquí https://www.gapminder.org/fw/world-health-chart/ en la que se explica que significan los colores y se muestra una evolución dinámica de cómo ha ido evolucionando en este último siglo que es interesante).

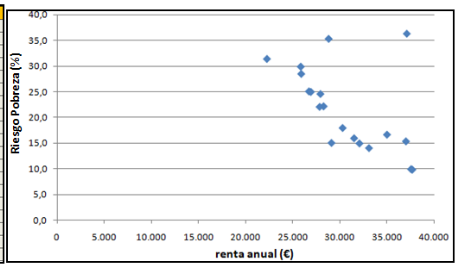
En un segundo momento se propone realizar el test propuesto en https://upgrader.gapminder.org/ acerca de la visión que tiene el alumnado sobre los temas que van saliendo. Son 18 preguntas con tres posibles respuestas. Cada pareja o grupo puede anotar la respuesta que cree correcta y luego se van comentando los resultados.

Objetivo de la sesión: concienciar de que el mundo en que nos movemos genera muchos datos en muy diversos temas, que el cómo los conocemos y conocerlos bien nos permite comprender el mundo de una u otra forma y que son necesarias herramientas matemáticas para ello.

Situamos esta sesión en la primera fase del modelo de diseño de situaciones de aprendizaje porque las actividades tareas propuestas permiten al profesorado observar los conocimientos previos del alumnado y, por otra parte, que los estudiantes tomen conciencia de cómo interpretan datos reales obtenidos de fuentes fiables.

2ª sesión: con ayuda de una hoja Excel, se trabaja la correlación entre diferentes tipos de variables. Tomando datos del https://www.ine.es/index.htm se puede facilitar al alumnado tablas y/o gráficos para interpretar, como por ejemplo el que se muestra a continuación en el que se trabajan conjuntamente la renta anual por familias en las comunidades autónomas españolas y el riesgo de pobreza con los datos del 2020.

Total Nacional	Renta media (€)	riesgo pobreza (%)
01 Andalucía	25.909	28,5
02 Aragón	31.529	16,0
03 Asturias, Principado de	28.284	22,2
04 Balears, Illes	33.115	14,1
05 Canarias	25.855	29,9
06 Cantabria	30.309	18,0
07 Castilla y León	29.125	15,1
08 Castilla - La Mancha	26.722	25,1
09 Cataluña	35.030	16,7
10 Comunitat Valenciana	27.948	24,6
11 Extremadura	22.250	31,4
12 Galicia	27.862	22,1
13 Madrid, Comunidad de	37.051	15,4
14 Murcia, Región de	26.925	25,0
15 Navarra, Comunidad Foral de	37.728	9,9
16 País Vasco	37.598	10,0
17 Rioja, La	32.096	15,0
18 Ceuta	28.824	35,3
19 Melilla	37.138	36,3

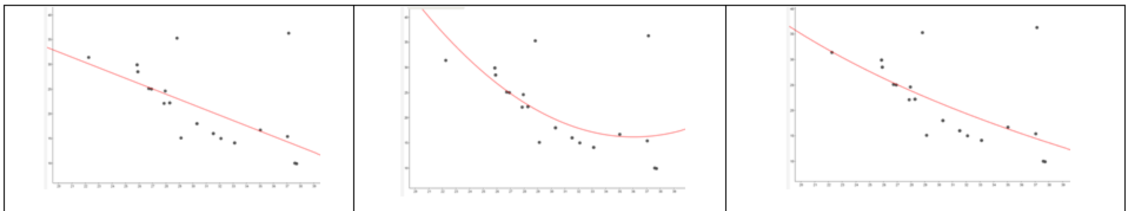


En función de la disponibilidad, se puede proporcionar al alumnado, fichas con diferentes gráficos para interpretar y ajustar “a mano” con una función lineal (u otro modelo que puedan considerar más adecuado); o bien si disponen de ordenador, que generen ellos los diagramas mediante la búsqueda previa de los datos, de manera que cada grupo mantenga la renta anual como variable fija de estudio, pero la segunda la pueden elegir libremente con la condición de que no se repita en otros grupos. De esta forma dispondremos de mayor cantidad de material e información para las siguientes sesiones y el debate, y el aprendizaje será más rico. Cabe esperar que la realización del test de la primera sesión les pueda dar ideas a la hora de elegir variables de estudio.

El objetivo de esta sesión es trabajar con datos reales, alejados de los ejercicios preparados de muchos libros de texto para que por ejemplo el coeficiente de correlación salga 0,99. Trabajando con datos reales y calculando coeficientes de correlación se facilita la comprensión de la covariación y da juego al debate sobre si correlación y causalidad es lo mismo, que es un fallo muy común en la población confundir ambos conceptos. Tras esta sesión se formalizan algunos conceptos como covariación, correlación y medición de la correlación (nube de puntos como primer acercamiento y medición numérica con el coeficiente de correlación y relación entre ambos).

Situamos esta sesión en la segunda y tercera fase del modelo de diseño de situaciones de aprendizaje. En la segunda fase porque se les propone a los alumnos y alumnas trabajar la correlación entre diferentes tipos de variablescon ayuda de una hoja Excel. Y en la tercera fase porque, tras la tarea de búsqueda, por parte de los grupos de estudiantes, de las variables a relacionar y del estudio de la correlación y causalidad, el profesorado propone una puesta en común de los resultados.

Las sesiones 3 y 4 se dedican a los modelos de ajuste entre dos variables. Se utilizarán las diferentes producciones realizadas en los diferentes grupos. Usando las tablas de la sesión anterior o generando otras nuevas, es muy dinámico y visual llevar los datos a Geogebra ya que permite ajustar los puntos con diferentes modelos funcionales. Por ejemplo, con los datos anteriores podemos observar si la función que se ajusta mejor a la nube de puntos es líneas, polinómica o logarítmica:



Modelo lineal — Modelo polinómico — Modelo logarítmico

Este tipo de actividad y el programa Geogebra, que permite trabajar a la vez con funciones y con tablas de datos, facilita al alumnado ir ajustando puntos, ir trabajando la relación de los parámetros de la recta de regresión con los datos recogidos y visualizar la bondad de ajuste, y errores cometidos en predicciones que se realicen con el modelo elegido. Cada grupo puede exponer al resto sus conclusiones y llegar entre todos al final del trabajo a elaborar un pequeño informe que recoja todas las observaciones en torno a cómo varían de manera conjunta diferentes aspectos poblacionales con la renta anual de las familias españolas.

En estas sesiones el docente o la docente pueden ir formalizando los objetos y conceptos matemáticos del bloque de análisis y tratamiento de datos e inferencia del sentido estocástico a medida que el debate lo vaya requiriendo.

Situamos la tercera y cuarta sesión en la tercera, cuarta y quinta fase del modelo de diseño de situaciones de aprendizaje. En la tercera fase porque los grupos de estudiantes exponen a los otros grupos los resultados obtenidos al resolver tareas más abiertas que las planteadas en la segunda sesión. En la cuarta fase porque los grupos de estudiantes tratan de encontrar modelos de ajuste entre dos variables estudiadas. Y en la quinta fase porque se formalizan los objetos y conceptos matemáticos que ha puesto en juego el alumnado al enfrentarse a las situaciones problemáticas.

Atención a las diferencias individuales:

Al ser una actividad abierta, permite trabajar con un alumnado muy diverso, por lo que, a nivel de objetos matemáticos, el ajuste de situaciones puede quedarse en el lineal según sea el grupo de trabajo, pero se pueden proponer tareas donde haya tipos de ajuste con modelos más complejos para aquellos grupos en los que haya o bien mayores expectativas o mayor curiosidad o dominen mejor los modelos funcionales. Por otro lado, al plantearse el trabajo generalmente en parejas o grupos pequeños también se proporciona posibilidad de mayor atención a las diferencias, pudiendo establecer grupos más homogéneos en el aprendizaje o lo contrario según sean las características del alumnado de la clase.

Recomendaciones para la evaluación formativa:

La actividad está pensada para crear debate, participación y que el alumnado vaya construyendo el conocimiento con el profesorado como guía, por lo que se tendrán en cuenta para la evaluación por un lado la actitud activa del alumnado en las sesiones de trabajo buscando información y realizando las actividades, por otro lado la calidad del trabajo presentado al grupo (han buscado los datos , han sabido manejar la tabla, el programa, han interpretado bien el tipo de correlación, utilizan diferentes representaciones para comunicar sus conclusiones…); por otro lado se puede presentar una prueba escrita de forma individual en la que aparezcan situaciones similares y pedir que las interpreten en los términos trabajados en clase.

V. Referencias

Aranda, C., y Callejo, M. L. (2011). Usando applets para construir el concepto de integral definida. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 58*, 65-75.

Arce, M. (2018). El cuaderno de matemáticas: Un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido. *La Gaceta de la RSME, 21*(2), 367-387.

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J.M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Síntesis.

Attard, C. (2014). I don't like it, I don't love it, but I do it and I don't mind: Introducing a framework for engagement with mathematics. *CurriculumPerspectives, 34*(3), 1–14.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E., y Bosch, D. (1996) *Cálculo diferencial e integral*. Síntesis.

Barbin, É.,Guichard, J. P., Moyon, M., Guyot, P., Morice-Singh, C., Métin, F., ... y Hamon, G. (2018). *Let history into the mathematics classroom*. Springer.

Batanero, C., Begué, N., Gea, M.M., y Roa, R. (2019). El muestreo: una idea estocástica fundamental. *Suma, 90*, 41-47.

Batanero, C., Ortiz, J. J., y Serrano, L. (2007). Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes en la aplicación del teorema de Bayes. En *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM* (pp. 199-208). SEIEM.

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Burgos, M. (2018). Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Cultura y Educación, 30*(4), 633-662.

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education, 50* (1), 1–20.

Blanco, L. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 171-185). Ed. Graó.

Blanco, L. J., Cárdenas, J. A. y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de matemáticas en la formación de matemáticas inicial de profesores de primaria*. Universidad de Extremadura.

Boaler, J. y Sengupta-Irving, T. (2012). Gender Equity and Mathematics Education. En J. Banks (Ed.), *Encyclopedia of Diversity in Education*. SAGE Publications, Inc.

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets*. Jossey-Bass.

Brown, L. y Coles, A. (2013). On doing the same problem – first lessons and relentless consistency. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22) (pp. 617–626). Oxford, UK.

De Bellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *EducationalStudies in Mathematics, 63*, 131-147.

De Hierro, A. F. R. L., Batanero, C., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Épsilon, 100*, 49-63.

Forgasz, H. y Rivera, F. (Eds.)(2012).*Towards equity in mathematics: Gender, culture, and diversity*. Springer.

Gairín, J. M. y Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos*. Madrid: Síntesis.

Gil, N., Blanco, L., y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15–32.

Giménez, J. (1996). Apuntes sobre la diversidad de conocimientos en educación secundaria. *Números, 28*, 65-78

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis.

Gómez-Chacón, I. M. (2000a). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. (2000b). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 43*(2), 149–168.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación, 334*, 75-95.

Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms*. Corwin.

Macho Stadler, M., Padrón Fernández, E., Calaza Díaz, L., CasanellasRius, M., Conde Amboage, M., Lorenzo García, E., y Vázquez Abal, M. E. (2020). Igualdad de género en el ámbito de las Matemáticas. En *Libro Blanco de Las Matemáticas* (pp. 375–420). Fundación Ramón Areces, Real Sociedad Matemática Española.

Mason, J., Barton, L. y Stacey, K. (2010). *Thinkingmathematically* (2º ed.). Pearson EducationLimited.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-598). Macmillan.

Navarro, V., Batanero, C., y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación matemática, 8*(01), 26-39.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *MathematicalProblemSolving*. AcademicPress.

Sowder, J. T. (1992). Making Sense of Numbers in School Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putman y Hattrup, R. A., *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1–51). Lawrence Erlbaum Associates.

Turégano, P. (1997). El aprendizaje del concepto de integral. *Suma: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 26*, 39-52.

Watson, A. y Ohtani, M. (Eds.) (2015) *Task Design in Mathematics Education*. Springer.