



MATEMÁTICAS PARA LA TOMA DE DECISIONES

Las matemáticas surgen de la necesidad de controlar el mundo que nos rodea. Como señala Bishop (1991), el origen de la actividad matemática del ser humano se encuentra en actividades cotidianas como contar, medir, localizar, diseñar, jugar o explicar. Todas estas acciones están relacionadas con distintos posibles modos de interacción del ser humano con su entorno. Las matemáticas constituyen un lenguaje mediante el cual abstraer y modelizar dicho entorno. Expresar la realidad en términos matemáticos nos permite analizarla, comprenderla y explicarla.

De este modo, no es casual que la ciencia moderna, especialmente desde el siglo XVIII en adelante, haga uso del lenguaje y de las herramientas proporcionadas por las matemáticas. Por su parte, la tecnología, entendida como el aprovechamiento práctico del conocimiento científico, tiene también necesariamente una fuerte componente matemática. La relación entre las matemáticas y la ciencia y la tecnología es, de hecho, bidireccional. Los avances científico-tecnológicos son, en muchas ocasiones, fuente de inspiración y motivación para el desarrollo de nuevas herramientas matemáticas.

Además, en la sociedad actual están cobrando cada vez mayor importancia herramientas tecnológicas cuyo origen y fundamentación son esencialmente matemáticas. Actividades como realizar una búsqueda en internet, comprar y realizar un pago en una plataforma online, utilizar sistemas web de cartografía y navegación, etc. son cotidianas para una buena parte del alumnado, que las utilizan en buena medida de forma acrítica, como una caja negra, sin conocer apenas nada sobre su funcionamiento interno.

Por todo lo anterior, resulta imprescindible incluir en el currículum conocimientos y destrezas que logren dotar al alumnado de herramientas que les permitan desarrollarse plenamente y de forma eficaz en un entorno de creciente digitalización. Así, es necesario desarrollar en el alumnado competencias que le doten de la capacidad de desenvolverse satisfactoriamente en contextos en los que el *Big Data*, el *Machine Learning*, los algoritmos basados en inteligencia artificial, las presencia en redes sociales, etc. juegan un papel cada vez más relevante. Todos estos elementos comparten una fuerte componente matemática. Esta materia está orientada a sentar en el alumnado las bases fundamentales para el desarrollo de algunas de las competencias necesarias para ejercer la ciudadanía con garantías en este contexto, comprendiendo los fundamentos de herramientas que se utilizan cotidianamente y, por tanto, siendo capaces de evaluar sus ventajas y su utilidad; pero también sus inconvenientes y peligros potenciales. Todo esto implica abordar conceptos relacionados con la matemática discreta, la modelización, o el pensamiento algorítmico y computacional que no se abordan en una materia obligatoria de matemáticas generales.

Las tres primeras competencias específicas de esta materia se corresponden con cada uno de los tres saberes básicos en torno a los cuales se estructurará la misma. En todas ellas juegan un papel central la identificación y puesta en valor de las matemáticas presentes en situaciones de la vida real, la modelización, la transferencia razonada de resultados entre las situaciones y la comunicación de los resultados obtenidos. La cuarta competencia específica, de carácter transversal a todos los saberes considerados, está vinculada con la necesidad de utilizar de forma esencial y significativa herramientas informáticas para abordar los problemas propios de la materia. Todas estas competencias están estrecha y directamente relacionadas, como no podría ser de otro modo, con las competencias específicas de la materia de matemáticas. También existen importantes vínculos con otras materias como la tecnología, la tecnología y digitalización o la economía y emprendimiento. Así pues, esta materia puede contribuir de forma especialmente significativa al desarrollo de algunas de las competencias clave (STEM, CD) y de forma también relevante al de algunas otras (CCL, CC).

La adquisición de las competencias específicas se evaluará a través de una serie de criterios de evaluación que pretenden reflejar los conocimientos, destrezas y actitudes que conforman los distintos saberes básicos que ayudarán a la adquisición de dichas competencias específicas. Los saberes se han organizado en tres grandes bloques: aritmética modular y criptografía, teoría de grafos y teoría de juegos. Estos tres bloques, pueden ser abordados de forma independiente, si bien guardan una relación que permite establecer conexiones entre ellos y también con conocimientos previos del alumnado, tanto de la materia de matemáticas como de otras mencionadas anteriormente. En particular, hacemos notar que cada uno de estos tres bloques contribuye en cierta medida a la adquisición de destrezas relacionadas con varios de los siete diferentes sentidos que estructuran el currículum de la materia obligatoria de matemáticas.



El bloque dedicado a la aritmética modular y la criptografía, a partir de conocimientos previos del alumnado, presenta algunos de los fundamentos de la tecnología digital. La aritmética básica es un campo en el que surgen de manera natural un buen número de conjeturas y propiedades que estudiar con ayuda de medios informáticos. Además, la aritmética modular se encuentra en la base del tratamiento informático de datos y la criptografía resulta indispensable en un mundo en el que la identidad digital es casi equivalente a la identidad real de una persona.

En el bloque dedicado a la teoría de grafos se aborda un objeto matemático cuya introducción resulta sencilla, pero cuyas aplicaciones abarcan múltiples y muy variadas situaciones. Estos contenidos permiten trabajar aspectos relacionados con la argumentación de forma bastante similar a lo que sucede en la geometría, pero proporcionando un contexto de aplicaciones más próximas a los intereses actuales del alumnado. La resolución de problemas reales mediante teoría de grafos motiva a su vez de forma muy clara y directa el uso de algoritmos sin los cuales la búsqueda de solución resulta casi inabordable.

En el bloque dedicado a la teoría de juegos se proporcionan herramientas para modelizar situaciones de conflicto muy habituales en áreas de conocimiento cuya relación con las matemáticas queda a veces fuera del ámbito escolar (economía, política, etc.) y en las que la toma de decisiones juega un papel fundamental. Además, al tratar este tipo de situaciones con información imperfecta surgen contextos en los que la presencia del azar tiene su origen en el desconocimiento y no necesariamente en la naturaleza aleatoria de los fenómenos involucrados.

El pensamiento computacional, el diseño y aplicación de algoritmos, así como su análisis deben estar presentes de manera sustancial a lo largo de los tres bloques. El uso de herramientas informáticas debe ser constante para representar objetos y situaciones, para formular conjeturas y ponerlas a prueba y para encontrar soluciones a problemas de forma efectiva y constructiva.

Tanto las competencias específicas, como los criterios de evaluación y los distintos saberes básicos están diseñados para constituir un todo que facilite el planteamiento de tareas complejas, individuales o colectivas, en diferentes contextos, significativas y relevantes permitiendo desarrollar los aspectos fundamentales de las matemáticas a la vez que se muestra su papel central como herramienta en la resolución de problemas y se potencia su valor y su uso como lenguaje en el que expresar la realidad.

Finalmente, los tres bloques de saberes básicos que se han diseñado guardan una cierta independencia entre ellos. Es decir, pueden ser relacionados, pero también son susceptibles de ser abordados individualmente de forma autónoma. Esto permite que los docentes y las docentes, si lo consideran conveniente, puedan adaptar los contenidos de la materia a los posibles intereses específicos del alumnado centrándose de forma específica solo en algunos de dichos bloques.

I. Competencias específicas

Competencia específica de la materia matemáticas para la toma de decisiones 1:

CE.MTD.1. Reconocer la importancia de la aritmética modular en un contexto tecnológico y digital, comprendiendo la necesidad y los fundamentos básicos de algoritmos de codificación sencillos y siendo capaz de aplicarlos de forma efectiva en situaciones concretas.

Descripción

El desarrollo de la informática y de las tecnologías digitales está basado en la posibilidad de expresar cualquier tipo de información (gráfica, sonora, etc.) en términos numéricos. Para comenzar a entender estos procesos es pues indispensable disponer de conocimientos aritméticos especializados y razonar en términos finitos, propios del lenguaje computacional. Esto supone el planteamiento de problemas aritméticos que se alejan de las situaciones escolares que el alumnado asocia a la aritmética, así como la necesidad de reflexionar sobre qué significa resolver un problema y el diseño de distintas estrategias en función de las herramientas disponibles y los objetivos planteados.

El desarrollo de esta competencia conlleva la sistematización de conocimientos aritméticos básicos que el alumnado ha abordado de manera informal desde la educación primaria. En particular, se trata de avanzar hacia un tratamiento más combinatorio y propio de la matemática discreta. También surge la necesidad de discutir sobre la existencia de



soluciones de ecuaciones y congruencias comprendiendo que, en ocasiones, solo estamos interesados en determinar la existencia y no necesariamente en encontrar la solución. Además, supone que los alumnos y las alumnas comprendan los fundamentos aritméticos de las tecnologías digitales que manejan en su día a día y aprecien la necesidad de desarrollar e implementar medidas de seguridad y privacidad en las comunicaciones.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia específica está vinculada con diversas competencias de la materia de matemáticas. Muchos de los contenidos tratados tienen una clara y marcada componente algorítmica y computacional, que se vincula con la competencia CE.M.4. Adicionalmente, la necesidad de utilizar distintas técnicas y conceptos matemáticos vincula esta competencia con CE.M.5. Del mismo modo, se espera que esta competencia contribuya a que los alumnos y las alumnas perciban la base matemática subyacente a muchas de las herramientas informáticas con las que se manejan en el día a día, en clara relación con la competencia CE.M.6.

Por otro lado, y más allá de la materia de matemáticas, la aplicación práctica de algoritmos sencillos de codificación está claramente vinculada con otras competencias específicas de la materia de tecnología y digitalización; en particular con CE.TD.5.

Vinculación con el perfil de salida

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM4, CD1, CD4, CD5, CPSAA5, CC3.

Competencia específica de la materia matemáticas para la toma de decisiones 2:

CE.MTD.2. Identificar la utilidad de la teoría de grafos para modelizar situaciones y problemas reales de la vida cotidiana y de materias del ámbito científico y tecnológico, empleándola para explorar distintas formas de proceder y para obtener y comunicar posibles soluciones.

Descripción

Multitud de situaciones en las que las relaciones entre objetos juegan un papel central pueden modelizarse mediante la teoría de grafos. Lo mismo sucede con un buen número de procesos de carácter iterativo o algorítmico. El alumnado está muy familiarizado con un buen número de estas situaciones presentes a menudo en aplicaciones informáticas que utiliza a diario. Para entender el funcionamiento de estos procesos se requiere de un conocimiento básico de los conceptos, propiedades y algoritmos subyacentes que permita no solo la comprensión de dichos procesos, sino también el análisis crítico de los mismos.

El desarrollo de esta competencia conlleva la capacidad del alumnado de modelizar situaciones variadas en los términos matemáticos de la teoría de grafos, siendo capaz de identificar, seleccionar y aplicar las herramientas y los enfoques más adecuados en función de las características de la situación concreta. Los alumnos y las alumnas deben ser capaces de transferir la información de forma bidireccional entre la situación y el modelo, expresando verbalmente, razonando y argumentando las conclusiones obtenidas. Además, se debe comprender la necesidad de encontrar soluciones de forma efectiva, aun cuando los grafos considerados sean grandes, y que hacerlo implica disponer de algoritmos para encontrar dichas soluciones toda vez que se conoce su existencia o para buscarlas de forma exploratoria si no es el caso. En particular, esto también supone constatar el papel indispensable de las herramientas computacionales en la resolución de problemas reales.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia específica está vinculada con diversas competencias de la materia de matemáticas. El énfasis puesto en el uso de la teoría de grafos como herramienta para modelizar situaciones enlaza directamente con la competencia CE.M.1, mientras que el uso de los métodos y técnicas asociados conllevan una clara relación con la competencia CE.M.2. Por su parte, el uso de la teoría de grafos en contextos intramatemáticos está vinculada con la competencia CE.M.5. Además, la identificación de la presencia de la teoría de grafos en multitud de situaciones de la vida real entronca de forma clara con la competencia CE.M.6; mientras que la comunicación de las soluciones obtenidas en como resultado del proceso de modelización involucra a la competencia CE.M.8.



La presencia y el aporte significativo de la teoría de grafos tanto en la planificación y el análisis de distintos procesos tecnológicos, así como en la solución de problemas asociados a los mismos vinculan esta competencia con competencias específicas de la materia de tecnología como CE.T.1 y CE.T.6. Los grafos juegan un papel fundamental en el diseño de algoritmos, lo que relaciona esta competencia con la competencia específica CE.TD.5 de la materia de tecnología y digitalización. Del mismo modo, conceptos y técnicas propios de la teoría de grafos sirven como base al funcionamiento de múltiples dispositivos y aplicaciones informáticas comunes en la vida diaria. Esto enlaza directamente con la competencia específica CE.TD.6.

Vinculación con el perfil de salida

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM4, CD1, CD5, CPSAA3, CPSAA4, CPSAA5, CC3, CC4, CE1, CE2, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas para la toma de decisiones 3:

CE.MTD.3. Utilizar la teoría de juegos para modelizar situaciones y problemas reales de la vida cotidiana y de materias del ámbito de las ciencias sociales y de la economía, reconociendo su aplicación a la toma de decisiones y obteniendo y expresando soluciones posibles en situaciones diversas.

Descripción

Esta competencia hace referencia a la aplicación de procesos y técnicas propios del razonamiento matemático en situaciones de conflicto en las que dos o más partes con intereses diversos deben decidir cómo actuar, de tal modo que el resultado obtenido por cada parte no depende solo de su propia acción, sino también de las de los demás. Esto supone el conocimiento de una terminología especializada y la construcción de un aparatage conceptual adecuados, que son nuevos para el alumnado. Además de ello, resulta necesario poner en juego diversas competencias y saberes relacionados con la modelización y representación, la organización y análisis de datos, las relaciones y funciones, el pensamiento computacional, etc.

El desarrollo de esta competencia conlleva la capacidad del alumnado de modelizar situaciones de conflicto en los términos matemáticos de la teoría de juegos, siendo capaz de identificar, seleccionar y aplicar las herramientas y los enfoques más adecuados en función de las características de la situación concreta. Además, los y las alumnas deben ser capaces de transferir la información de forma bidireccional entre la situación y el modelo, expresando verbalmente, razonando y argumentando las conclusiones obtenidas como resultado de la aplicación de las técnicas propias de la teoría de juegos a la situación estudiada, gestionando adecuada la presencia del azar cuando sea necesario.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia específica está vinculada con diversas competencias de la materia de matemáticas. El énfasis puesto en el uso de la teoría de juegos como herramienta para modelizar situaciones enlaza directamente con la competencia CE.M.1, mientras que el uso de los métodos y técnicas asociados conllevan una clara relación con la competencia CE.M.2. Por su parte, la constatación de la presencia y el uso dentro de la teoría de juegos de ideas provenientes de la teoría de grafos o del cálculo de probabilidades está vinculada con la competencia CE.M.5. Además, la identificación de la presencia de la teoría de juegos en multitud de situaciones de la vida real entronca de forma clara con la competencia CE.M.6; mientras que la comunicación de las soluciones obtenidas en como resultado del proceso de modelización involucra a la competencia CE.M.8.

Por su parte, la teoría de juegos es una herramienta muy habitual en el ámbito de la economía y de la toma de decisiones empresariales. Los comportamientos estratégicos basados en la toma de decisiones racionales y bien fundamentadas son esenciales para un emprendimiento exitoso. En consecuencia, esta competencia está directamente relacionada con competencias específicas de la materia de economía y emprendimiento como pueden ser CE.EE.1 o CE.EE.6.



Vinculación con el perfil de salida

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, STEM4, CD1, CD5, CPSAA1, CPSAA5, CC3, CC4, CE2, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas para la toma de decisiones 4:

CE.MTD.4. Emplear herramientas de cálculo simbólico u otras herramientas digitales para representar resultados y procedimientos, explorar, conjeturar y comprobar propiedades, y resolver problemas, desarrollando e implementando algoritmos matemáticos sencillos.

Descripción

Las herramientas informáticas juegan un papel fundamental en el desarrollo científico, técnico y tecnológico actual. Más allá de su ubicuidad en la vida cotidiana, la utilización de los ordenadores ha permitido abordar problemas cuya resolución requiere, necesariamente, del manejo de grandes cantidades de datos. Los alumnos y las alumnas deben ser conscientes de este hecho y han de apreciar las múltiples posibilidades que les aportan las herramientas tecnológicas a su alcance para resolver los problemas que se les plantean, pero también sus debilidades y la necesidad de un análisis previo que permita abordar la situación en términos computacionales.

El desarrollo de esta competencia conlleva el uso de herramientas informáticas de forma significativa con diferentes funciones. Desde la mera representación de objetos, pasando por la exploración de conjeturas y propiedades, hasta el diseño y la implementación de algoritmos sencillos. Esto supone, en muchas ocasiones, abordar los problemas de un modo específico distinto al que se utilizaría en caso de resolverlos sin el uso de tecnología. No obstante, debe señalarse la riqueza de un abordaje complementario en el que la tecnología complementa al pensamiento abstracto, y los razonamientos teóricos proporcionan una guía para el abordaje del problema con medios informáticos.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia específica está vinculada con diversas competencias de la materia de matemáticas. En particular, la interpretación y resolución de problemas, y el análisis de las soluciones mediante herramientas y técnicas informáticas se vincula directamente con las competencias específicas CE.M.1 y CE.M.2. El uso exploratorio de ese mismo tipo de herramientas se relaciona con CE.M.3., y su utilización orientada a la representación o visualización se relaciona con CE.M.7. El desarrollo e implementación de algoritmos está directamente relacionado con elementos propios del pensamiento computacional y, por tanto, con la competencia específica CE.M.4.

Esta relación con el pensamiento computacional es la que vincula esta competencia específica con competencias específicas de la materia de tecnología. En particular con aquellas relacionadas con la resolución automatizada de problemas, CE.T.4, y con el aprovechamiento de herramientas digitales, CE.T.5. Eventualmente podría plantearse la posibilidad de diseñar y desarrollar algoritmos propios, lo que enlazaría con competencias de la materia de tecnología y digitalización como CE.TD.5 y CE.TD.7.

Vinculación con el perfil de salida

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL3, STEM1, STEM2, STEM4, CD1, CD2, CD3, CD5, CPSAA4, CPSAA5, CCEC4.

II. Criterios de evaluación

Los saberes básicos que conforman esta materia y que configuran las competencias específicas que venimos de describir comparten un rasgo fundamental. Los objetos matemáticos con los que se trabaja pueden ser presentados y descritos de forma relativamente sencilla e intuitiva para el alumnado en este punto de su formación. Los números enteros, los grafos o la idea de juego son, o bien conocidos, o bien susceptibles de ser introducidos a partir de ejemplos concretos. Sin embargo, en los tres casos, esta aparente sencillez oculta una gran profundidad potencial. En el caso de la aritmética, nos encontramos con la numerosa cantidad de conjeturas, propiedades, etc. que son muy fáciles de enunciar y muy difíciles de abordar en general. Por su parte, en el caso de la teoría de grafos y de la teoría de juegos



nos encontramos con la amplísima variedad de aplicaciones y de problemas reales que pueden resolverse gracias a ellas.

Así pues, aunque es evidente que resulta indispensable una base conceptual sobre la que poder construir, el foco ha de ponerse necesariamente sobre la acción del alumnado. En el caso de la aritmética, esta acción implica reelaborar sus conocimientos previos y utilizarlos de forma más sofisticada y en combinación con herramientas tecnológicas. En el caso de la teoría de grafos y de la teoría de juegos, los alumnos y las alumnas deben ser capaces de utilizar los nuevos conceptos que se les presentan para matematizar la realidad, siendo capaces de traducir un problema del mundo real a en términos matemáticos, resolverlo (haciendo uso de diferentes representaciones, utilizando lenguaje formal y especializado, refinando y ajustando el modelo, argumentando, etc.) para terminar interpretando los resultados y validando el proceso completo.

Por último, tanto la naturaleza de los objetos involucrados, como sus aplicaciones, conllevan la utilización de herramientas tecnológicas de forma significativa. Esto no solo tiene implicaciones sobre el tipo de actividades a realizar, sino también sobre la necesidad de introducir y evaluar formas de pensar fundamentalmente algorítmicas.

CE.MTD.1
<i>Reconocer la importancia de la aritmética modular en un contexto tecnológico y digital, comprendiendo la necesidad y los fundamentos básicos de algoritmos de codificación sencillos y siendo capaz de aplicarlos de forma efectiva en situaciones concretas.</i>
En los bloques dedicados a la aritmética, el énfasis se pone en aspectos conceptuales más que en los operativos. Los cálculos se realizan con calculadora o, preferiblemente con ordenador, de modo que lo importante es saber qué hacer y cómo hacerlo. En la resolución de ecuaciones y de congruencias es muy importante el estudio de la existencia de solución. En el bloque de criptografía, de nuevo, se hace especial énfasis en conocer los fundamentos de los algoritmos y sus debilidades.
<ol style="list-style-type: none">1.1. Aplicar el algoritmo de Euclides para calcular el m.c.d. de dos números y para obtener la expresión de la identidad de Bezout.1.2. Resolver ecuaciones diofánticas lineales en una y dos variables, estudiando previamente la existencia de solución.1.3. Poseer los fundamentos necesarios para trabajar módulo un entero m, sabiendo las diferentes propiedades que surgen según m sea primo o no.1.4. Resolver de forma constructiva sistemas de congruencias lineales con una incógnita, estudiando previamente la existencia de solución.1.5. Conocer y determinar unidades y divisores de cero en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ para cualquier m.1.6. Aplicar el pequeño teorema de Fermat para estudiar la primalidad de un entero dado.1.7. Conocer, idear y aplicar algoritmos de cifrado de sustitución y polialfabéticos sencillos, entendiendo sus vulnerabilidades.1.8. Conocer los fundamentos y vulnerabilidades del algoritmo RSA, aplicándolo en casos sencillos.
CE.MTD.2
<i>Identificar la utilidad de la teoría de grafos para modelizar situaciones y problemas reales de la vida cotidiana y de materias del ámbito científico y tecnológico, empleándola para explorar distintas formas de proceder y para obtener y comunicar posibles soluciones.</i>
No se considera tan importante el conocimiento enciclopédico de definiciones, propiedades, criterios, etc. como la capacidad de reconocer propiedades, clasificar grafos, formular definiciones propias, argumentar, etc. Correspondientemente, se hace especial énfasis en modelizar situaciones utilizando grafos y en identificar, aplicar e interpretar adecuadamente las ideas relevantes a dicha situación.
<ol style="list-style-type: none">2.1. Identificar propiedades y tipos de grafos.2.2. Clasificar grafos según distintos criterios.2.3. Formular definiciones de las principales propiedades y familias de grafos haciendo uso de lenguaje especializado.2.4. Proporcionar argumentos y/o contraejemplos acerca de la existencia, o no, de ciertos tipos de grafos y respecto al cumplimiento, o no, de determinadas propiedades.2.5. Utilizar grafos para modelizar matemáticamente situaciones de la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología.2.6. Proponer situaciones y problemas reales susceptibles de ser modelizados utilizando la teoría de grafos.2.7. Aplicar adecuadamente algoritmos sencillos sobre grafos, reflexionando sobre su eficiencia y transfiriendo el resultado a la situación real de partida.
CE.MTD.3
<i>Utilizar la teoría de juegos para modelizar situaciones y problemas reales de la vida cotidiana y de materias del ámbito de las ciencias sociales y de la economía, reconociendo su aplicación a la toma de decisiones y obteniendo y expresando soluciones posibles en situaciones diversas.</i>
Al igual que en el caso anterior, queremos hacer énfasis en el uso de una terminología especializada adecuada en situaciones de modelización, en el conocimiento operativo de conceptos y técnicas propias de la teoría de juegos y, especialmente, en la interpretación y comunicación de los resultados obtenidos al aplicarlos en contextos concretos.
<ol style="list-style-type: none">3.1. Conocer la terminología básica propia de la teoría de juegos y utilizarla adecuadamente en situaciones oportunas.3.2. Utilizar la forma de representación apropiada para modelizar un juego o una situación determinada.3.3. Comprender los conceptos de estrategia (pura y mixta) y de punto de equilibrio, así como su interpretación en situaciones concretas.3.4. Resolver juegos de dos jugadores, suma cero e información perfecta mediante retropropagación.3.5. Resolver completamente juegos de dos jugadores y suma cero dados en forma normal en el caso 2×2.3.6. Expresar y comunicar los resultados de la resolución de un juego (ganancias, pérdidas, estrategias ganadores, etc.) en los términos del contexto concreto en que se está trabajando.
CE.MTD.4
<i>Emplear herramientas de cálculo simbólico u otras herramientas digitales para representar resultados y procedimientos, explorar, conjeturar y comprobar propiedades, y resolver problemas, desarrollando e implementando algoritmos matemáticos sencillos.</i>



La propia naturaleza de los contenidos abordados en esta materia implica una fuerte carga computacional. Esto conlleva, por una parte, la necesidad de utilizar de forma esencial y significativa herramientas informáticas y, por otra, la capacidad de idear e interpretar algoritmos. A este respecto, no es necesario conocer ningún lenguaje de programación, pero sí manejar de forma operativa las ideas de bucles y condicionales. En todo caso, el trabajo con esta competencia estará siempre centrado y orientado hacia los distintos saberes básicos que conforman la materia.

- 4.1. Formular conjeturas acerca de propiedades de los números enteros y estudiar su posible veracidad o falsedad de forma computacional.
- 4.2. Utilizar herramientas informáticas para explorar propiedades de grafos.
- 4.3. Diseñar algoritmos propios para resolver problemas aritméticos en \mathbb{Z} y en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
- 4.4. Expresar en pseudocódigo los algoritmos aritméticos sencillos diseñados.
- 4.5. Analizar y comprender el funcionamiento de algoritmos sencillos expresados en pseudocódigo en contextos de aritmética, teoría de grafos y teoría de juegos.

III. Saberes básicos

III.1. Descripción de los diferentes bloques en los que se estructuran los saberes básicos

A. Aritmética modular y criptografía

Los alumnas y las alumnas disponen en este punto de su formación de conocimientos básicos sobre la aritmética de los números enteros. Las operaciones básicas, los conceptos de divisor y múltiplo, la factorización en potencias de primos, el mínimo común múltiplo máximo común divisor, etc. A partir de estas ideas básicas es posible profundizar en la aritmética de los números enteros, introduciendo elementos clave como el algoritmo de Euclides (como sistematización del algoritmo de la división que el alumnado conoce desde primaria) o la identidad de Bezout. Para ello se hace necesario revisar y sistematizar los conocimientos previos. Así mismo, una vez hecho esto, también es factible abordar una aproximación inicial a la aritmética modular que no involucra la introducción de nuevos conceptos y que permite considerar una relación de equivalencia distinta de la igualdad. De hecho, la aritmética modular puede contribuir a reforzar el sentido numérico y permite eventualmente visitar conocimientos previos elementales, como los criterios de divisibilidad, por ejemplo, aportando justificaciones sencillas de los mismos (Beltrán & Rodríguez, 2019).

Por otro lado, el alumnado también dispone de conocimientos algebraicos suficientes relacionados con los conceptos de relación, variable, ecuación, etc. Esto permite abordar un tratamiento algo más abstracto de la aritmética modular, considerando los conjuntos $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y pudiendo definir en términos más generales las ideas de inverso multiplicativo, unidad, divisor de cero, etc. El trabajo con estos conjuntos permite una aproximación a un tipo de razonamiento algebraico que va más allá del uso de simbolismo y de la resolución de ecuaciones y que se relaciona con la idea de estructura algebraica, poniendo énfasis en las propiedades de las operaciones. De este modo, se contribuye de manera esencial al desarrollo del sentido algebraico de tal forma que las estructuras algebraicas surgen a partir de las experiencias matemáticas (Kaput, 1998).

Este bloque se cierra con una introducción a la criptografía. Este contenido puede servir como motivación y como contexto para trabajar distintos elementos del currículo (Caballero Gil & Bruno Castañeda, 2007). Sin embargo, pensamos que es un tópico interesante en sí mismo. La presentación de métodos de cifrado sencillos, basados en una aproximación histórica, permite trabajar elementos vinculados al pensamiento computacional (en los procesos de codificación y descodificación) y a la modelización matemática (en los procesos de traducción de un mensaje verbal a un código numérico). La introducción del algoritmo RSA permite ilustrar el uso de matemáticas abstractas en un problema de claro interés práctico, lo que puede contribuir de manera sustancial a desarrollar elementos del sentido socioafectivo como el fomento de la curiosidad en el aprendizaje de las matemáticas (Koblitz, 1997).

B. Teoría de grafos

El concepto de grafo tiene una cierta dualidad que lo hace especialmente interesante desde el punto de vista de la formación del alumnado. En primer lugar se trata de un objeto matemático, cuya introducción es sencilla desde un punto de vista abstracto, y en torno al cual es posible definir y estudiar multitud de conceptos y propiedades. En este sentido, la teoría de grafos supone un contexto interesante en el que trabajar competencias relacionadas con el razonamiento y la argumentación, papel que tradicionalmente jugó la geometría euclídea dadas sus similitudes desde un punto de vista matemático y didáctico (González et al., 2021). En segundo lugar, la teoría de grafos posee múltiples aplicaciones en muy diferentes contextos fuera de un ámbito puramente matemático. Pueden aplicarse, entre otros, en sociología, en problemas lingüísticos, en problemas de índole geográfica, e incluso en el diseño de algoritmos



informáticos. Esto los convierte en un elemento clave para el trabajo de competencias STEM y para el desarrollo de actividades multidisciplinares (Coriat et al., 1989).

La introducción de los grafos a partir de una representación pictórica permite, inicialmente, trabajar elementos clave del sentido espacial. La idea de isomorfismo de grafos está fuertemente relacionada inicialmente con la visualización y con la realización de movimientos y transformaciones elementales. No obstante, al avanzar progresivamente en la introducción de distintos tipos de grafos mediante definiciones basadas en propiedades que no dependen de la descripción geométrica, surge la posibilidad de abordar elementos fundamentales del sentido algebraico relacionados con patrones, modelización, etc. (Ferrarello & Mammana, 2018). Las definiciones de familias clásicas, como los grafos completos o bipartitos completos tienen un marcado carácter combinatorio y el recuento de elementos (vértices o aristas) en grafos de tipos particulares (árboles, ciclos, etc.) permiten trabajar aspectos del sentido numérico e incluso podrían utilizarse como ejemplos con los que tratar de evitar la ilusión de linealidad vinculada al razonamiento proporcional (De Bock et al., 1999).

Por otro lado, la importante y directa aplicación práctica de los grafos se pone especialmente de manifiesto cuando estos se utilizan para resolver problemas reales provenientes del ámbito de la tecnología, la ingeniería, etc. En estos casos, la potencia y el interés de los grafos va mucho más allá de la mera modelización y representación del problema y supone la aplicación de algoritmos que encuentren de forma concreta la solución buscada. Por ejemplo, un determinado problema real de transporte de mercancías que pueda reducirse a estudiar si un determinado grafo contiene un ciclo euleriano, necesariamente va a requerir de encontrar dicho ciclo. Esto abre la puerta a la introducción en el aula de algoritmos sencillos sobre grafos que nos permitirán trabajar elementos fundamentales del pensamiento computacional y sus competencias asociadas. Los algoritmos que se proponen, además de resolver problemas concretos muy particulares y de poder ser presentados de forma simple, involucran una idea de recursión muy vinculada con el sentido algebraico (Sandefur et al., 2018).

C. Teoría de juegos

Un juego o un rompecabezas, tanto como los tradicionales juegos de estrategia (damas, ajedrez, go, etc.), como los que conlleven alguna componente de azar (dados, póker, etc.), son considerados “juegos matemáticos” siempre y cuando se realicen durante su práctica reflexiones en las que se pongan de manifiesto conocimientos matemáticos (Martín Morales et al., 2009). Sin embargo, pese a su nombre, la teoría de juegos no solo resulta útil para abordar juegos matemáticos, sino que también puede aplicarse para modelizar situaciones de “conflicto” que involucran competidores que interactúan de un modo racional. Este tipo de situaciones surgen de forma natural en ámbitos tan diversos como la economía, la biología, etc. Para abordar este contenido, resulta necesario introducir el uso especializado de ciertos términos como “juego”, “pago”, “información”, etc. que, como sucede a menudo en matemáticas tienen un significado técnico que se aparta de su uso coloquial.

El uso de juegos combinatorios (Colipán, 2015) puede servir de introducción a la materia y permite, además, desarrollar diversos elementos del sentido algebraico, así como competencias relacionadas con el razonamiento y la argumentación. Estos juegos combinatorios, además, permiten vincular los contenidos propios de este saber básico con los correspondientes a la teoría de grafos (Martín Novo & Méndez Alonso, 2004). Por otro lado, la presencia del azar en multitud de juegos que forman parte del entorno cercano del alumnado hace que este contexto permita abordar puntos importantes del sentido estocástico vinculados a la inferencia, la incertidumbre o la justicia en un juego (Garfunkel, 2018).

La posibilidad de modelizar muchos juegos tanto en forma extensiva (esencialmente utilizando árboles) como en forma normal (haciendo uso de matrices o tablas de pagos) proporciona un contexto interesante en el que abordar el trabajo con distintos sistemas de representación, coordinándolos y realizando transformaciones entre ellos (Socas, 2007). Por otra parte, la resolución de juegos en forma extensiva conlleva rasgos de pensamiento computacional mientras que la resolución en forma normal, haciendo uso de conceptos como puntos de equilibrio o estrategia mixta, implica el trabajo con inequaciones y el manejo de ideas muy vinculadas a la optimización, lo que permite el desarrollo de elementos clave del sentido algebraico. Finalmente, el ámbito de la teoría de juegos, por su relación cercana con las ciencias sociales, puede resultar adecuado no solo para abordar actividades multidisciplinares, sino también para presentar, analizar y discutir situaciones que permitan trabajar el sentido socioafectivo.



III.2. Concreción de los saberes básicos

A. Aritmética modular y criptografía	
<p>En este bloque se parte de conocimientos sobre aritmética básica que el alumnado posee desde cursos anteriores. Sobre ellos se construye un tratamiento algo más moderno de la aritmética para poder introducir las ideas de la aritmética modular. Como aplicación de estas ideas se plantea el algoritmo criptográfico RSA como ejemplo de cifrado basado en elementos puramente matemáticos.</p>	
Conocimientos, destrezas y actitudes	Orientaciones para la enseñanza
<p>A.1. Aritmética en Z:</p> <ul style="list-style-type: none"> – La relación de divisibilidad. – Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. – Algoritmo de Euclides. Identidad de Bezout. – Números primos. El teorema fundamental de la aritmética. – Ecuaciones diofánticas lineales. Resolución completa de los casos con una y dos variables. 	<p>Conviene remarcar la simetría que existe entre las relaciones “ser divisor de” y “ser múltiplo de”. Discutir el papel del -1.</p> <p>El máximo común divisor y el mínimo común múltiplo se introducen a partir de sus propiedades definitorias.</p> <p>Señalar la relación entre ser divisor y tener resto 0 en la división.</p> <p>Presentar la identidad de Bezout unida al algoritmo de Euclides, dada su íntima relación.</p> <p>Los primos se definen como enteros tales que si dividen a un producto, deben dividir al menos a uno de los factores. La definición “habitual” que se corresponde con el concepto de elemento irreducible se presenta como una propiedad equivalente, pero no como definición.</p> <p>Una vez introducido el teorema fundamental de la aritmética se puede utilizar para dar la conocida forma de calcular el m.c.d. y el m.c.m. a partir de la factorización.</p> <p>Es interesante discutir la eficiencia del método de cálculo del m.c.d. a partir de la factorización en primos con su cálculo mediante el algoritmo de Euclides.</p> <p>En las ecuaciones diofánticas lineales de una variable es importante remarcar que buscamos soluciones enteras solamente.</p> <p>En el caso de dos variables, vincular la solución a lo sabido sobre la identidad de Bezout.</p>
<p>A.2. Aritmética modular:</p> <ul style="list-style-type: none"> – La relación de congruencia módulo un entero m. Propiedades. – Inversos multiplicativos. Existencia y cálculo. – Resolución de congruencias lineales con una incógnita. – Resolución de sistemas de congruencias lineales con una incógnita. El teorema chino de los restos. 	<p>La relación $a \equiv b \pmod{m}$ se puede definir de diversas formas. Se recomienda hacerlo a través de la idea de “diferir en un múltiplo de m” y relacionar esta idea con que el resto de la división de (a-b) por m es 0.</p> <p>En las propiedades conviene hacer énfasis en aquellos comportamientos que difieren de lo que sucede en Q o en R. En particular esto lleva a discutir las diferencias según m sea primo o no.</p> <p>Es importante enfatizar la notación de inverso de x como x^{-1} y no como $1/x$. Evitar en lo posible la notación fraccionaria. En todo caso, esto es un tema a discutir detenidamente con el alumnado.</p> <p>Para el cálculo de los inversos, cuando existen, se recurre en general a la identidad de Bezout. Sin embargo, en casos sencillos se pueden obtener por inspección haciendo uso de la propia definición.</p> <p>Para resolver las congruencias lineales con una incógnita de la forma $ax \equiv b \pmod{m}$ es interesante proponer ejemplos con distintos (a,b,m) para que el alumnado descubra las condiciones de existencia de solución.</p> <p>El mismo comentario se puede hacer para el caso de sistemas. Se recomienda inicialmente resolver los sistemas de forma constructiva, y comenzando por el caso de 2 ecuaciones.</p>
<p>A.3. El conjunto Z/mZ:</p> <ul style="list-style-type: none"> – El conjunto de clases módulo m. – Unidades y divisores de cero. La función phi de Euler. – Orden de un elemento. – El pequeño teorema de Fermat y el teorema de Euler. 	<p>Hasta este momento se ha estado trabajando sobre todo Z. Interesa ahora restringirse al conjunto finito de las clases modulo m. Como ejemplo motivador de esta necesidad se suele utilizar la llamada “aritmética del reloj” indicando que solo tiene sentido considerar los elementos $\{0,1,\dots,11\}$ y se trabaja módulo 12. Existen, sin embargo otras opciones, como hablar de paridad para introducir la aritmética binaria en $\{0,1\}$ que, además, permite fácilmente construir las tablas de sumar y multiplicar.</p> <p>Para la adecuada definición de ‘divisor de cero’ conviene haber introducido la divisibilidad vinculada a la relación “ser múltiplo de”. Aunque no es cierto para cualquier anillo, se puede enfatizar el hecho de que todo elemento es unidad o divisor de cero.</p> <p>Interesa remarcar que la función phi cuenta el número de unidades. Estudiar los casos de módulo primo y compuesto para señalar en qué sentido el teorema de Euler extiende el pequeño teorema de Fermat.</p> <p>En este punto se puede comentar el uso del pequeño teorema de Fermat para detectar primos.</p>
<p>A.4. Criptografía:</p> <ul style="list-style-type: none"> – Esteganografía y criptografía. Origen, utilidad y aplicaciones. – Cifrados de sustitución y polialfabéticos. – Cifrados simétricos y asimétricos. – El algoritmo RSA. 	<p>Es interesante, y se recomienda, comentar la aparición y evolución de la criptografía desde un punto de vista histórico. No obstante, puede ser preferible motivar la necesidad de la criptografía en un contexto actual en base a las necesidades del comercio y de la banca electrónica, de evitar la suplantación de identidad, etc. Estas problemáticas pueden ser cercanas al alumnado (que compran on-line, tienen cuentas en redes sociales, etc.) y permiten además concienciarles sobre estas cuestiones.</p> <p>Puede ser interesante que los alumnos y las alumnas diseñen sus propios sistemas de cifrado, los pongan a prueba y evalúen su practicidad o no. Esto puede servir para introducir las ideas de cifrados simétricos y asimétricos y los posibles usos de cada uno de ellos.</p> <p>El caso del algoritmo RSA es un ejemplo interesante de aplicación práctica de gran importancia que hace uso de conceptos matemáticos abstractos.</p> <p>Al hablar de criptografía, necesariamente se debe hablar de las debilidades de los distintos sistemas, ataques posibles, etc.</p>
B. Teoría de grafos	
<p>En este bloque se pretende introducir unas nociones básicas de teoría de grafos que permitan al alumnado utilizarlos para modelizar situaciones que subyacen a multitud de problemas reales. Además, pese a que las ideas introducidas son muy básicas y pueden presentarse de forma muy sencilla, se trata de técnicas potentes que resuelven problemas de gran importancia práctica.</p>	



<i>Conocimientos, destrezas y actitudes</i>	<i>Orientaciones para la enseñanza</i>
B.1. Definición, conceptos y propiedades básicas: <ul style="list-style-type: none"> – Definición intuitiva de grafo. Vértices y aristas. – Representaciones pictóricas. Isomorfismo de grafos. – Grafos dirigidos. Grafos ponderados. – Subgrafos. Ciclos y caminos. – Conexión. Grafos bipartitos. – Planaridad y coloreabilidad. 	<p>Se recomienda introducir el concepto de grafo de forma intuitiva, como conjunto de puntos (vértices) algunos de los cuales pueden estar unidos por líneas (aristas) lo que inmediatamente lleva a su representación pictórica.</p> <p>Es preferible motivar la aparición de los conceptos de grafo, grafo dirigido y grafo ponderado, y sus propiedades básicas a partir de problemas reales (aunque sea simplificados): relaciones en una red social, redes eléctricas, rutas de transporte, etc. Evitar ejemplos artificiosos y limitar los ejemplos extraídos del ámbito puramente matemático. De estos últimos, puede ser interesante presentar el grafo de los divisores de un número porque permite visitar multitud de conceptos del bloque A. Se pueden abordar situaciones escolares (pintar un mapa) o de ocio (resolución de sudokus) en función de los intereses concretos del alumnado.</p> <p>Resulta conveniente que el concepto de isomorfismo de grafos se presente de la forma más independiente posible respecto de la representación pictórica del grafo.</p> <p>Inicialmente es adecuado trabajar con grafos con un bajo número de vértices, de modo que las propiedades, el isomorfismo, etc. pueden ser abordados inicialmente de forma exploratoria.</p> <p>La aparición de ejemplos concretos con gran número de vértices y aristas puede motivar la necesidad de otros sistemas de representación. Aquí se puede introducir una representación tabular, que se aproxime a la representación matricial.</p> <p>Es interesante observar como propiedades como la planaridad o coloreabilidad de un grafo modelizan situaciones aparentemente muy diferentes.</p>
B.2. Tipos y familias de grafos: <ul style="list-style-type: none"> – Grafo ciclo y grafo camino. – Grafos completos. Grafos bipartitos completos. – Árboles. – Grafos eulerianos y hamiltonianos. 	<p>Si bien los conceptos de ciclo y camino ya se han presentado como subgrafos de uno dado, también se pueden introducir como tipos especiales de grafos.</p> <p>Puede ser interesante plantear las definiciones de grafo completo, bipartito completo y árbol y pedir a los alumnos y las alumnas que dibujen ejemplos concretos de cada uno de ellos.</p> <p>Se puede abordar la exploración de qué propiedades (coloreabilidad, planaridad, etc.) tienen o no estas familias.</p> <p>Como antes, los conceptos de grafo euleriano y hamiltoniano se deben presentar a partir de situaciones lo más próximas posible a la realidad (visitas a ciudades en la ruta de un vendedor, reparación de carreteras).</p> <p>Es relativamente sencillo que el alumnado llegue a conjeturar las condiciones necesarias y suficientes para que un grafo sea euleriano. Prestar especial atención a la conexión.</p> <p>En el caso de los grafos hamiltonianos no se conocen caracterizaciones de este tipo de grafos. No obstante, es interesante que analicen qué sucede para algunas de las familias y tipos de grafos presentados.</p> <p>Aunque las distintas familias consideradas pueden introducirse inicialmente de manera informal y con referencias a la representación pictórica del grafo, debe intentarse en la medida de lo posible que el alumnado acabe por generar sus propias definiciones basadas únicamente en propiedades de grafos.</p>
B.3. Algoritmos de grafos: <ul style="list-style-type: none"> – El algoritmo voraz de coloración. – El algoritmo de Fleury. – El algoritmo de Dijkstra. 	<p>Tanto el algoritmo voraz de coloración, como el de Fleury (para grafos eulerianos) son muy sencillos de presentar. Incluso es posible que parte del alumnado pueda llegar a ellos intuitivamente. Se puede comentar, informalmente, la ineficiencia de los mismos.</p> <p>El algoritmo de Dijkstra (para encontrar caminos más “cortos”) surge en el contexto de grafos ponderados y responde a aplicaciones prácticas muy concretas e importantes. En consecuencia, deben plantearse como respuesta a problemas específicos concretos y no a partir de una motivación meramente matemática.</p> <p>Por ejemplo, dada una red de carreteras y los tiempos necesarios para recorrer cada arista, es natural buscar el camino más rápido. Los alumnos y las alumnas pueden estar familiarizados con este tipo de cuestiones a través de búsquedas en Google Maps, por ejemplo.</p> <p>Conviene discutir con el alumnado la necesidad de disponer de algoritmos sistemáticos, frente a la mera inspección directa, que es inviable cuando la cantidad de información es muy grande (es decir, cuando el grafo es muy complejo).</p> <p>Los algoritmos se presentan informalmente, como una serie de pasos. Como máximo, en función del alumnado y de sus intereses, se puede plantear pseudocódigo.</p>

C. Teoría de juegos

En este bloque se pretende introducir unas nociones básicas de teoría de juegos que permita al alumnado utilizarlos para modelizar múltiples situaciones que subyacen a multitud de problemas reales vinculados a la toma de decisiones. Se trata de un ejemplo interesante en el que situaciones propias de un contexto de ciencias sociales, y vinculadas al comportamiento humano admiten un tratamiento matemático.

<i>Conocimientos, destrezas y actitudes</i>	<i>Orientaciones para la enseñanza</i>
B.1. Definiciones básicas: <ul style="list-style-type: none"> – Concepto de juego. – Juegos de azar y deterministas. – Información perfecta e imperfecta. – Vector de pagos. Juegos de suma cero. 	<p>Se recomienda introducir todas las definiciones e ideas básicas a partir de ejemplos concretos. Puede ser necesario, y recomendable, discutir sobre la idea de “juego”.</p> <p>El caso de los juegos unipersonales tiene que ser considerado desde el punto de vista de que existe otro jugador hipotético (la “naturaleza”).</p> <p>En este punto puede comenzar a discutirse la idea de estrategia, así como lo que pueda significar “resolver un juego”, elementos que se abordan con más detalle más adelante.</p>
B.2. Formas de representar un juego: <ul style="list-style-type: none"> – Forma extensiva. Árbol del juego. 	<p>En esta parte se recomienda visitar los ejemplos concretos utilizados en la parte anterior y representarlos, señalando la necesidad de disponer de representaciones abstractas o formales de los juegos para poder sistematizar razonamientos que pueden haber surgido anteriormente de manera informal.</p>



<p>– Forma normal. Estrategias. Representación tabular del juego.</p>	<p>Al presentar el árbol del juego conviene enfatizar que se trata de un grafo y remarcar la idea de cómo los grafos sirven también para representar situaciones de toma de decisiones. Conviene, cuando sea posible, combinar ambas formas de representar un juego comparándolas y señalando las posibles ventajas e inconveniente de cada una de ellas. Al introducir estas formas de representar un juego, la notación puede resultar en algunos casos extraña o arbitraria. Conviene, en todo momento, motivar la necesidad de disponer de esas notaciones y discutir con el alumnado el modo de denotar los conceptos implicados (pagos, estrategias, etc.). Eventualmente se puede llegar a un acuerdo sobre cuáles utilizar.</p>
<p>B.3. Juegos de dos jugadores con suma cero: – Resolución de juegos de dos jugadores, suma cero e información perfecta dados en forma extensiva. Retropropagación. – Resolución de juegos de dos jugadores y suma cero dados en forma normal. Estrategias puras, dominación y puntos silla. Estudio completo en el caso 2×2. Estrategias mixtas.</p>	<p>Retomar la idea de qué significa “resolver un juego”. Observar que siempre esto depende del punto de vista bajo el que se modeliza el juego y que ello implica una toma de posición. Discutir sobre si es equivalente maximizar ganancias a minimizar pérdidas. Se debe señalar la dificultad que computacional que puede tener resolver un juego. Se puede poner el ejemplo del ajedrez señalando el hecho de que cualquier juego finito debe tener necesariamente una estrategia “ganadora”. Como contraste, puede ser interesante considerar el caso del tres en raya, cuya resolución completa sí es abordable. Dada la dificultad es necesario hacer simplificaciones para poder abordarlo en el aula. Estas simplificaciones (dos jugadores, suma cero, etc.) no deben presentarse sin más, sino que se debe remarcar en qué sentido simplifican la situación. De este modo, se puede valorar qué ideas son exportables o no (y por qué) a otros casos más generales.</p>

IV. Orientaciones didácticas y metodológicas

IV.1. Sugerencias didácticas y metodológicas

En primer lugar, hemos de señalar, que dado el carácter esencialmente matemático de la materia que nos ocupa, obviamente seguirán siendo válidas aquí muchas, si no todas, las sugerencias realizadas en dichas materias. No obstante, el carácter optativo de esta materia puede conllevar algunas leves matizaciones o modificaciones

Como primera indicación metodológica general, se recomienda un enfoque de enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas, cuya esencia reside en que el contenido emerge de las situaciones y problemas que se proponen al alumnado (Beltrán-Pellicer & Martínez-Juste, 2021). De esta forma, se recomienda que los distintos contenidos abordados se presenten a partir de situaciones introductorias en las que el propio trabajo del alumnado proporcione los elementos para una posterior institucionalización.

En segundo lugar, también se sugiere adoptar una metodología de aprendizaje basado en proyectos en la que el alumnado trabaje de forma cooperativa. En este sentido, y para favorecer la evaluación formativa por pares, puede resultar especialmente recomendable que distintos grupos de alumnos y alumnas se centren en proyectos diferentes, de tal modo que los distintos equipos deban exponer sus resultados ante el resto de sus compañeros y compañeras.

A este respecto, debe fomentarse la redacción de informes y la presentación de los mismos tanto en forma escrita como oral y utilizando diversidad de medios y formatos. Comunicar resultados de investigación es una labor crucial no solo en el mundo académico, sino también en el profesional y laboral. Además, la necesidad de transmitir y compartir de forma efectiva los resultados de proyectos conlleva la necesidad de estructurar los discursos y de utilizar el lenguaje con precisión.

Ahora bien, pese a que el lenguaje de las matemáticas es especializado y suele conllevar una gran componente simbólica, pensamos que no debe hacerse énfasis en la introducción de notaciones por el mero hecho de presentarlas. Por ejemplo, es mucho más importante conseguir que los alumnos y las alumnas tengan una idea clara de qué es una unidad módulo m , que proporcionarles una notación para dicho conjunto. Esto no debe suponer, no obstante, permitir un uso descuidado del lenguaje natural. Las matemáticas deben ser rigurosas, pero el simbolismo no es condición necesaria ni suficiente para el rigor. Algo parecido sucede con los resultados que tienen un nombre determinado. Aunque conocer la expresión “algoritmo de Euclides” puede ser un elemento importante de cultura general, es más importante conocer el algoritmo y su utilidad, ventajas e inconvenientes, que su nombre.

Donde sí debe hacerse un énfasis especial es en la necesidad de argumentar, justificar y explicitar los razonamientos realizados. Esto supone, en primer lugar, comprender la necesidad de que las afirmaciones que se realicen tengan un sustento. A partir de aquí, el grado de sofisticación puede ir aumentando desde el uso de ejemplos y contraejemplos, hasta las pruebas preformales o incluso las demostraciones (Ibañes & Ortega, 2001). En todo caso esta sofisticación debe estar adaptada a las capacidades y nivel de madurez de cada estudiante.



El uso de herramientas informáticas juega un papel fundamental dentro de esta materia. En particular, el alumnado se va a encontrar con un buen número de algoritmos e incluso se va a encontrar en la necesidad de diseñar algunos propios. En este sentido, y en relación con alguno de los puntos anteriores, existen diversos modos de representar un algoritmo. Se recomienda utilizar, por ejemplo, diagramas de flujo que permiten representar el proceso gráficamente (Yadav et al., 2017). En caso de que el alumnado tenga interés, se puede tratar de avanzar hacia el uso de pseudocódigo para expresar algunos de los algoritmos.

Aunque los conocimientos abordados en esta materia tienen aplicaciones sobre elementos culturalmente muy recientes, lo cierto es que muchos de los objetos matemáticos considerados son relativamente antiguos. Por tanto, el papel de la historia de las matemáticas puede ser relevante a distintos niveles (Fauvel & Van Maanen, 2006). Para comenzar, puede resultar una fuente de motivación que contribuya además a trabajar aspectos socioemocionales y que permita poner en valor el carácter humano de las matemáticas. Además, también es posible utilizar la historia como fuente de problemas concretos y de situaciones introductorias de distintos conceptos. Finalmente, tampoco hay que descartar la posibilidad de que el alumnado trabaje directamente sobre textos originales y fuentes históricas, si bien esto puede conllevar una labor de adaptación por parte del profesorado. En cualquier caso, para valorar la pertinencia o no de cualquiera de estos enfoques, deben tenerse en consideración los intereses particulares del alumnado, que pueden ser variables.

IV.2. Evaluación de aprendizajes

En su *Pedagogía universitaria* (Giner de los Ríos, 1905), el que fuera uno de los fundadores de la Institución Libre de Enseñanza, recogía un escrito suyo de 1894 en el que se abogaba vehementemente, con argumentos propios y ajenos, por la supresión de los exámenes:

“La emulación, una de las formas inferiores de la lucha animal por la existencia, desmoraliza, obliga a desatender los fines superiores de la educación y hace imposible la diversidad y la originalidad de esta, imponiendo a todos un tipo único: el que ha de dar la victoria en el concurso. El maestro, esclavizado a una tarea servil, no puede consagrar lo mejor de sus fuerzas a aquello que más responde a su vocación y que él realizaría con superior desempeño; sino a ese ideal de satisfacer a los examinadores: todo lo demás es, o perjudicial, o cuando menos artículo de lujo, a que no hay tiempo ni capacidad de atender. Mientras tanto, por su parte, el discípulo tiene que encogerse de hombros ante la idea nueva, la investigación original, el punto de vista personal y fresco, que es lo único que puede despertar su interés, abrir su espíritu, dilatar su horizonte, fortalecer su inteligencia y su amor al saber y al trabajo. ¿De qué le sirve todo esto en un examen?” (p. 118).

Dicho esto, en una materia optativa como la que nos ocupa tiene pleno sentido prescindir completamente de los exámenes como instrumento de evaluación de los aprendizajes y optar por otras herramientas más ajustadas tanto a las sugerencias metodológicas realizadas, en las que se sugiere la enseñanza a través de la resolución de problemas, como a la propia naturaleza de los contenidos considerados y la fuerte componente relacionada con la modelización.

La dicotomía entre evaluación formativa y sumativa es clásica en la literatura. Aunque generalmente suele hacerse énfasis en el primero de estos tipos, trabajos como el de Taras (2005) ponen de manifiesto que ambos son necesarios dentro de un proceso de enseñanza-aprendizaje, y que pueden utilizarse en conjunto de manera provechosa tanto para el profesorado como para el alumnado. Cabe señalar, sin embargo, que tal y como señalan autores como Black et al. (2002), la evaluación formativa debe ser una evaluación para aprender y, para ello, necesariamente debe estar integrada dentro del propio proceso de enseñanza.

Los instrumentos disponibles para la evaluación en matemáticas son muy diversos (Barberà, 2000) al margen de las pruebas escritas que recomendamos no utilizar. En el caso de la evaluación sumativa, recomendamos la utilización de portafolios, en los que los alumnos y las alumnas reflejen de forma sistemática y organizada el trabajo realizado a lo largo de todo el curso. El material recogido en los portafolios no debería ser un mero recuento o sumario de los contenidos concretos abordados durante el curso o de las actividades y proyectos realizados, sino que más bien debería proporcionar información holística sobre la visión del alumnado de la materia, sus avances, creencias, dificultades, etc. Lograrlo supone una profunda labor de diseño por parte del profesorado, así como proporcionar ayuda y guía al alumnado de cara a su autorreflexión. Actividades como la proyección de trabajo de estudiantes para su discusión en grupo pueden resultar especialmente interesantes a este respecto (Lambdin & Walker, 1994).



Por lo que respecta a la evaluación formativa, tanto la autoevaluación como la evaluación por pares, juegan un papel fundamental. En ambos casos es necesario que los objetivos de aprendizaje sean conocidos por el alumnado y se pretende que los alumnos y las alumnas sean conscientes de su proceso de aprendizaje. De esta manera, se favorece la autorregulación del alumnado, así como su autonomía. En definitiva, en este tipo de formación se persigue recoger evidencias de aprendizaje que permitan al docente o a la docente tener información “en tiempo real” sobre el estado en el que se sitúa cada estudiante y proporcionar la retroalimentación adecuada (Arce et al., 2019).

Adicionalmente, puede resultar recomendable, con vistas a una evaluación formativa eficaz, que el docente o la docente elaboren un diario de clase en el que se pueda también dar cuenta de intervenciones del alumnado, especiales dificultades detectadas, etc.; además de servir como herramienta para la autoevaluación de su propia labor.

IV.3. Diseño de situaciones de aprendizaje

Desde un punto de vista general las situaciones de aprendizaje deben ubicar al alumnado como agente de su propio aprendizaje. Para ello es imprescindible partir del interés del alumnado y tratar de integrar distintos elementos curriculares de la materia o elementos de distintas materias o ámbitos mediante tareas y actividades significativas y relevantes para resolver problemas de manera creativa y cooperativa, reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión crítica y la responsabilidad. Para que la adquisición de las competencias sea efectiva, las situaciones deben estar bien contextualizadas y ser respetuosas con las experiencias del alumnado y sus diferentes formas de comprender la realidad. Deben estar compuestas por tareas complejas cuya resolución conlleve la construcción de nuevos aprendizajes. El diseño de estas situaciones debe suponer la transferencia de los aprendizajes adquiridos por parte del alumnado, posibilitando la articulación coherente y eficaz de los distintos conocimientos, destrezas y actitudes propios de esta etapa. Las situaciones deben partir del planteamiento de unos objetivos claros y precisos que integren diversos saberes básicos. Además, deben proponer tareas o actividades que favorezcan diferentes tipos de agrupamientos, desde el trabajo individual al trabajo en grupos, permitiendo que el alumnado asuma responsabilidades personales y actúe de forma cooperativa. Además, su puesta en práctica debe implicar la producción y la interacción verbal e incluir el uso de recursos auténticos en distintos soportes y formatos.

Dentro del ámbito concreto de las matemáticas, autores como Da Ponte y otros (2017) señalan una serie de principios que pueden orientar el diseño de tareas matemáticas de tipo exploratorio, que son las que se sugiere utilizar en el contexto de esta materia. En concreto, los cuatro principios propuestos por estos autores son:

- Los objetivos deben apoyar el desarrollo de nuevas representaciones, conceptos y estrategias, deben promover la movilización del alumnado, en pos de aclarar nociones matemáticas y de hacer conexiones.
- La estructura debe variar de lo simple a lo complejo, proponiendo diferentes cuestiones (sencillas, de cálculo, abiertas, etc.).
- Deben resultar atrayentes para el alumnado, pero conteniendo un elemento de desafío.
- Han de plantearse en diferentes tipos de contexto, tanto en los puramente matemáticos, como en los más cercanos a la experiencia del alumnado.

Además, en el desarrollo de una situación de aprendizaje debe tenerse en cuenta la importancia del profesorado. En este sentido se señala, en particular, la gran importancia que juega la capacidad del profesorado de observar, analizar y responder ante las acciones del alumnado.

IV.4. Ejemplificación de situaciones de aprendizaje

Como hemos comentado en las sugerencias didácticas y metodológicas, se sugiere un aprendizaje basado en proyectos. Como ejemplo, vamos a presentar las líneas generales de una posible situación de aprendizaje ubicada en el bloque de saberes dedicado a la teoría de grafos.

Ejemplo de situación de aprendizaje: Mapas y Sudokus

Esta situación puede abordarse dentro del bloque B.1. Definición, conceptos y propiedades básicas. Aunque se propone implementarla en forma de proyecto grupal, puede adaptarse fácilmente para el trabajo cooperativo en gran grupo.

Introducción y contextualización:



Estamos al final del bloque B.1. Los alumnos y las alumnas disponen ya de la terminología básica de la teoría de grafos y se deben encontrar relativamente cómodos trabajando con representaciones pictóricas. También se habrán trabajado numerosos ejemplos concretos de modelización de situaciones utilizando grafos y se tiene una idea operativa sobre el isomorfismo de grafos. Además, se han introducido algunas propiedades básicas como la conexión o la coloreabilidad.

Objetivos didácticos:

Los objetivos didácticos concretos de esta actividad son los siguientes:

- Utilizar la teoría de grafos para modelizar situaciones problemáticas: pintar un mapa y resolver un sudoku.
- Identificar los conceptos y propiedades relevantes de la teoría que están implicados en esas situaciones.
- Reconocer la equivalencia de ambos problemas.

Elementos curriculares involucrados:

Los elementos curriculares involucrados en esta situación de aprendizaje son los siguientes. Para los objetivos y competencias clave, ver el Artículo 7 y el Anexo I del *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. El resto de elementos están detallados en el presente documento:

- Objetivos: b), e), f) y h).
- Competencias clave: CCL1, CCL2, STEM2, STEM4, CD1, CPSAA3 y CPSAA4
- Competencias específicas: CE.MTD.2 y CE.MTD.4.
- Criterios de evaluación: 2.1, 2.2, 2.5 y 2.6.
- Saberes básicos: Todos los del bloque B.1.

Conexiones con otras áreas:

La actividad tiene un carácter relativamente autocontenido dentro de la materia. Pueden realizarse conexiones con conocimientos aritméticos y algebraicos si se decide explorar la relación existente entre la resolución de un sudoku y la resolución de un sistema de ecuaciones (esto puede llevar a relaciones con el bloque A). El coloreado de mapas es una tarea escolar usual en la materia de geografía e historia. El problema del coloreado de mapas puede abrir la puerta a hablar sobre el teorema de los cuatro colores, cuya resolución, eminentemente computacional, puede permitir establecer puentes con materias de tecnología y digitalización.

Descripción de la actividad:

Sea cual sea el enfoque adoptado para el desarrollo de la actividad, se trata de una situación abierta en la que el alumnado debe llegar, como punto final, a que tanto el coloreado de un mapa, como la resolución de un sudoku son en esencia, y pese a las apariencias, el mismo problema. Para ello, el alumnado debe dar una serie de pasos:

- Paso 1: Introducir ambos problemas (resolución de sudokus y coloreado de mapas), recordando en qué consisten, las restricciones, etc.
- Paso 2: Modelizar cada problema por separado como un grafo. Analizar propiedades de los grafos obtenidos y reflexionar sobre el proceso inverso (dado un grafo, construir el mapa o el sudoku correspondientes, si es que es posible).
- Paso 3: Relacionar ambos problemas con el concepto de coloreabilidad e identificar su equivalencia. Buscar alguna otra situación que también sea equivalente al coloreado de un grafo.
- Paso 4: Comunicación de los resultados. Evaluación formativa.

Estos pasos estructurarán el diseño concreto de la actividad, que dependerá en sus detalles del enfoque adoptado. En el apartado siguiente se hacen algunas consideraciones más concretas.

Metodología y estrategias didácticas:

Respecto a la temporalización, si la actividad se configura como un proyecto para el trabajo cooperativo recomendamos que el alumnado trabaje a lo largo de una o dos sesiones de clase. Se puede dedicar otra sesión a



implementar las actividades de evaluación formativa que proponemos más adelante. Por su parte, si se trabaja en gran grupo, la actividad puede desarrollarse a lo largo de una sesión de clase, dedicando una segunda sesión a implementar actividades de evaluación formativa. Nótese que, en ambos casos, las actividades de evaluación forman parte de la situación de aprendizaje y no deben plantearse a los alumnos y las alumnas explícitamente como pruebas de evaluación.

Para el caso en que se opte por un abordaje como proyecto, es recomendable que el docente o la docente entreguen al alumnado un pequeño guion inicial a partir del cual pueda comenzar el trabajo y que, adicionalmente, se hayan preparado por adelantado materiales de apoyo para el alumnado ya sea en forma de documentos elaborados ad hoc o proporcionándoles referencias a páginas web, videos, etc. En el caso de trabajar en gran grupo, se recomienda que el profesorado prepare una serie de fichas o actividades secuenciadas con las que estructurar el desarrollo de la sesión. En este caso, los debates e interacciones entre estudiantes, así como entre estudiantes y docente deben ser lo más frecuentes posible.

Algunas estrategias y recomendaciones concretas, en relación con los tres pasos que hemos descrito anteriormente:

- En el paso 1 es recomendable que sean los alumnos y las alumnas quienes describan los problemas. En este sentido es muy probable que alguno pueda ser aficionado a los sudokus y pueda explicar la mecánica al resto de compañeros. En el caso de los mapas, es fácil obtener las restricciones (regiones fronterizas deben tener distintos colores) de forma colectiva.
- En el paso 2 es muy importante promover y conseguir una reflexión sobre las propiedades de los grafos que surgen al modelizar cada uno de los problemas. En este punto la búsqueda y propuesta de ejemplos y contraejemplos puede ser fundamental y se podrán alcanzar distintos niveles de rigor y argumentación en función del alumnado. El proceso inverso juega un papel muy importante a este respecto, pues puede ayudar a que el alumnado visualice los motivos de algunas de las restricciones que se hayan podido detectar.
- En el paso 3, para afianzar la idea de equivalencia entre ambos problemas, es interesante utilizar los grafos como paso intermedio para construir un mapa a partir de un sudoku y viceversa. Las situaciones equivalentes adicionales deben estar en relación con los intereses mostrados por el alumnado.

Atención a las diferencias individuales:

Si la actividad se configura como un proyecto para el trabajo cooperativo, las diferencias individuales quedarán marcadas por el mayor o menor grado de profundización que alcance cada grupo. En este sentido el docente o la docente, conocedores de las posibilidades de cada uno de los grupos, pueden proporcionar apoyo y materiales más o menos avanzados en función de las mismas. En términos generales, los objetivos mínimos a cubrir en el trabajo son los que se han señalado en el apartado correspondiente, pudiendo los alumnos y las alumnas profundizar o apartarse del tema principal tanto como el profesorado considere oportuno y razonable.

En el caso de orquestarse la actividad en gran grupo, el docente o la docente disponen de un mayor control sobre el desarrollo de la misma, pudiendo intervenir y reconducir en cualquier momento. Por tanto, el mayor o menor grado de profundización podrá estar marcado de antemano, teniendo en cuenta que las actividades desarrolladas en el aula han de ser flexibles y el docente o la docente deben adaptarse al avance del alumnado.

Recomendaciones para la evaluación formativa:

Las recomendaciones que a este respecto pueden hacerse dependen del modo en que se implemente la actividad de forma efectiva. Así, si suponemos que se aborda como un proyecto llevado a cabo por un pequeño grupo de estudiantes algunas posibles sugerencias serían:

- Se puede pedir al alumnado que elaboren un póster y lo presenten ante sus compañeros, respondiendo a las preguntas que estos puedan formularles. Así se evalúa, no solo al grupo implicado (a través de su exposición y de sus respuestas) sino también al resto de estudiantes (a través de las preguntas que puedan realizar).
- En esta misma situación, se puede solicitar que alguno de los alumnos o alguna de las alumnas (o un grupo de ellos y ellas) que no han formado parte del grupo evalúe la exposición realizada. Esta evaluación debe estar motivada y fundamentada y quienes la realizan deben haber desarrollado una rúbrica con ayuda del docente o de la docente.



Si, por el contrario, la actividad se implementase en gran grupo mediante un enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas, posibles ideas para una evaluación formativa podrían ser:

- Realización de preguntas abiertas por parte del docente o de la docente, para que el alumnado las responda y se inicie un debate. Si un alumno o una alumna hacen una consulta al docente o a la docente, pedir que sea algún igual quién la responda.
- Se puede pedir al alumnado que diseñe un cuestionario basado en la actividad realizada, junto con una rúbrica para su evaluación. Después se reparten esos cuestionarios aleatoriamente, cada estudiante resuelve el que le ha correspondido y evalúa el que ha diseñado.

V. Referencias

- Arce, M., Conejo, L., & Muñoz, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Síntesis
- Barberá, E. (2000). Los instrumentos de evaluación en matemáticas. *Aula de innovación educativa*, 93-94, 14-17.
- Bishop, A. J. (1991). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education*. Kluwer.
- Beltrán, M.P., & Rodríguez, R.G. (2019). Modular arithmetic in the high school math classroom. En A. Rosas (Ed.), *Research Reports in Mathematics Education: the classroom* (pp. 41-62). Miami, FL: L.D. Books.
- Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 98, 11-21.
- Black, P.J., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2002). *Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom*. King's College London School of Education.
- Caballero Gil, Pino; Bruno Castañeda, Carlos (2007). A cryptologic way of teaching mathematics. *Teaching Mathematics and its Applications*, 26, 2-16.
- Colipán, X. (2015). Desarrollo de la actividad científica en clases a través del estudio de juegos combinatorios, el ejemplo del juego del chocolate. *Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 691-712.
- Coriat, M., Sancho, J. M., Gonzalvo, P., & Marín, A. (1989). *Nudos y nexos. Redes en la escuela*. Síntesis.
- Da Ponte, J., Pereira, J., Enriques, A., & Quaresma, M. (2013). Designing and using exploratory tasks. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 491-499). ICMI.
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2001). Some reflections on the illusion of linearity. En P. Radelet de Grave & R. Brichard (Eds.), *Proceedings of the 3rd European Summer University on History and Epistemology in Mathematical Education, Vol. 1* (pp. 153-167). Université Catholique de Louvain.
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. A. (2006). *History in mathematics education: The ICMI study*. Springer.
- Ferrarello, D., & Mammana, M. F. (2018). Graph theory in primary, middle, and high school. En E. W. Hart & J. Sandefur (Eds.), *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research. ICME-13 Monographs* (pp. 183-200). Springer.
- Garfunkel, S. (2018). Fairness. En E. W. Hart & J. Sandefur (Eds.), *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research. ICME-13 Monographs* (pp. 203-213). Springer.
- Giner de los Ríos, F. (1905). O educación, o exámenes. En *Pedagogía universitaria* (pp. 115-134). Sucesores de Manuel Soler.
- González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Puertas, M. L. (2021). Characterizing Levels of Reasoning in Graph Theory. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(8), em1990.
- Ibañes, M. J., & Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de bachillerato. *UNO*, 28, 39-60.



- Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Koblitz, N. (1997). Cryptography as a teaching tool. *Cryptologia*, 21(4), 317-326.
- Lambdin, D.V., & Walker, V.L. (1994). Planning for classroom portfolio assessment. *The Arithmetic Teacher*, 41(6), 318-324.
- Martín Morales, J., Muñoz Escolano, J.M., & Oller Marcén, A.M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos: una experiencia. *Contextos Educativos*, 12, 137-164.
- Martín Novo, E., & Méndez Alonso, A. (2004). Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 46, 31-35.
- Sandefur, J., Somers, K., & Dance, R. (2018). How recursion supports algebraic understanding. En E. W. Hart & J. Sandefur (Eds.), *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research. ICME-13 Monographs* (pp. 145-162). Springer.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En: M. Camacho, P. Flores, & P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52), SEIEM.
- Taras, M. (2005). Assessment – summative and formative – some theoretical reflections. *British Journal of Educational Studies*, 53(4), 466-478.
- Yadav, A., Good, J., Voogt, J., & Fisser, P. (2017). Computational thinking as an emerging competence domain. En M. Mulder (Ed.), *Competence-based Vocational and Professional Education* (pp. 1051-1067). Springer.