MATEMÁTICAS

Las matemáticas se encuentran en cualquier actividad humana, desde el trabajo científico hasta las expresiones culturales y artísticas, y forman parte del acervo cultural de nuestra sociedad. El razonamiento, la argumentación, la modelización, el conocimiento del espacio y del tiempo, la toma de decisiones, la previsión y control de la incertidumbre o el uso correcto de la tecnología digital son características de las matemáticas, pero también la comunicación, la perseverancia, la organización y optimización de recursos, formas y proporciones o la creatividad. Así pues, resulta importante desarrollar en el alumnado las herramientas y saberes básicos de las matemáticas que le permitan desenvolverse satisfactoriamente tanto en contextos personales, académicos y científicos como sociales y laborales.

El desarrollo curricular de las matemáticas se fundamenta en los objetivos de la etapa, prestando especial atención a la adquisición de las competencias clave establecidas en el Perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica. Dicha adquisición es una condición indispensable para lograr el desarrollo personal, social y profesional del alumnado, y constituye el marco de referencia para la definición de las competencias específicas de la materia.

La línea principal en la definición de las competencias específicas de matemáticas está basada en la resolución de problemas. Además, se abordan la formulación de conjeturas, el razonamiento matemático, el establecimiento de conexiones entre los distintos elementos matemáticos, con otras materias y con la realidad, y la comunicación matemática, todo ello con el apoyo de herramientas tecnológicas, y las destrezas socioafectivas.

Resolver problemas no es solo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino que también es una de las principales formas de aprender matemáticas y debe ser el medio a través del cual se construyen los saberes de cada uno de los sentidos. Por tanto, se trata de un enfoque de enseñanza que afecta a la naturaleza de las matemáticas. El presente currículo, mediante las orientaciones, hará especial hincapié en esto. Además, en la resolución de problemas destacan procesos como su interpretación, la traducción al lenguaje matemático, la aplicación de estrategias matemáticas, la evaluación del proceso y la comprobación de la validez de las soluciones. Dejar la resolución de problemas en la periferia, como una actividad ajena al proceso de construcción de las matemáticas, influye en las creencias que se forma el alumnado, tanto hacia las matemáticas como hacia su aprendizaje, fomentando una visión mecanicista, poco creativa y pasiva de estas. En realidad, las matemáticas son todo lo contrario. En definitiva, si se pretende que el alumnado consiga ser competente resolviendo problemas (lo cual es un objetivo), estos deben formar parte intrínseca de las situaciones de aprendizaje a lo largo de todos los cursos.

Las competencias específicas entroncan y suponen una profundización con respecto a las adquiridas por el alumnado a partir del área de Matemáticas durante la Educación Primaria, proporcionando una continuidad en el aprendizaje de las matemáticas que respeta el desarrollo psicológico y el progreso cognitivo del alumnado. Se relacionan entre sí y han sido agrupadas en torno a cinco bloques competenciales según su naturaleza: resolución de problemas (1 y 2), razonamiento y prueba (3 y 4), conexiones (5 y 6), comunicación y representación (7 y 8) y destrezas socioafectivas (9 y 10).

La adquisición de las competencias específicas a lo largo de la etapa se evalúa a través de los criterios de evaluación y se lleva a cabo a través de la movilización de un conjunto de saberes básicos que integran conocimientos, destrezas y actitudes. Estos saberes se estructuran en torno al concepto de sentido matemático, y se organizan en dos dimensiones: cognitiva y afectiva. Los sentidos se entienden como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos, métricos, geométricos, algebraicos, estocásticos y socioafectivos. Dichos sentidos permiten emplear los saberes básicos de una manera funcional, proporcionando la flexibilidad necesaria para establecer conexiones entre los diferentes sentidos, por lo que el orden de aparición no implica ninguna temporalización ni orden cronológico en su tratamiento en el aula.

El sentido numérico se caracteriza por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, y por el desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones.

El sentido de la medida se centra en la comprensión y comparación de atributos de los objetos del mundo natural. Entender y elegir las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar magnitudes, utilizar los instrumentos

adecuados para realizar mediciones, comparar objetos físicos y comprender las relaciones entre formas y medidas son los ejes centrales de este sentido. Asimismo, se introduce el concepto de probabilidad como medida de la incertidumbre.

El sentido espacial aborda la comprensión de los aspectos geométricos de nuestro mundo. Registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas, describir sus movimientos, elaborar o descubrir imágenes de ellas, clasificarlas y razonar con ellas son elementos fundamentales de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

El sentido algebraico proporciona el lenguaje en el que se comunican las matemáticas. Ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresándolas mediante diferentes representaciones, así como la modelización de situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas son características fundamentales del sentido algebraico. La formulación, representación y resolución de problemas a través de herramientas y conceptos propios de la informática son características del pensamiento computacional. Por razones organizativas, en el sentido algebraico se han incorporado dos apartados denominados Modelo matemático y Pensamiento computacional, que no son exclusivos del sentido algebraico y, por lo tanto, deben trabajarse de forma transversal a lo largo de todo el proceso de enseñanza de la materia. El pensamiento computacional incluye el análisis de datos, la organización lógica de los mismos, la búsqueda de soluciones en secuencias de pasos ordenados y la obtención de soluciones con instrucciones que puedan ser ejecutadas por una herramienta tecnológica programable, una persona o una combinación de ambas, lo cual amplía la capacidad de resolver problemas y promueve el uso eficiente de recursos digitales.

El sentido estocástico comprende el análisis y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en una amplia variedad de situaciones cotidianas.

El sentido socioafectivo integra conocimientos y destrezas esenciales para desarrollar actitudes y creencias positivas hacia las matemáticas y hacia su enseñanza y aprendizaje, establecer y alcanzar metas, y aumentar la capacidad de tomar decisiones responsables e informadas. Para ello, el alumnado debe experimentar situaciones emocionalmente adecuadas. Manejar correctamente estas habilidades mejora el aprendizaje del alumnado, combate actitudes negativas hacia las matemáticas, contribuye a erradicar ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato indispensable y promueve un aprendizaje activo fomentando la motivación intrínseca. De nuevo, un ambiente que desarrolle una cultura de aula propicia para el aprendizaje a través de la resolución de problemas será el punto de partida para el trabajo en el dominio socioafectivo. La gestión de interacciones, el trabajo en pequeño y gran grupo será esencial. Para lograr estos fines, se pueden desarrollar estrategias como dar a conocer al alumnado el papel de las mujeres en las matemáticas a lo largo de la historia y en la actualidad, normalizar el error como parte del aprendizaje y fomentar el diálogo equitativo.

Las competencias específicas, los criterios de evaluación y los saberes básicos están diseñados para facilitar el desarrollo de unas matemáticas inclusivas que permitan el planteamiento de tareas individuales o colectivas, en diferentes contextos, que sean significativas y relevantes para los aspectos fundamentales de las matemáticas. A lo largo de toda la etapa se ha de potenciar el uso de herramientas tecnológicas en todos los aspectos de la enseñanza-aprendizaje ya que estas facilitan el desarrollo de los procesos del quehacer matemático y hacen posible huir de procedimientos rutinarios.

Atendiendo a la diversidad de motivaciones e intereses sociales, culturales, académicos y tecnológicos, la materia de Matemáticas del último curso de la etapa se ha configurado en dos opciones, A y B. Matemáticas A se desarrolla preferentemente mediante la resolución de problemas, la investigación y el análisis matemático de situaciones de la vida cotidiana; mientras que Matemáticas B profundiza, además, en los procedimientos algebraicos, geométricos, analíticos y estadísticos, incorporando contextos matemáticos, científicos y sociales.

I. Competencias específicas

Competencia específica de la materia matemáticas 1:

CE.M.1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.

Descripción

La resolución de problemas constituye un eje fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, ya que es un proceso central en la construcción del conocimiento matemático. La comprensión de una situación o problema es siempre el primer paso hacia su exploración o resolución. Una buena representación o visualización del problema ayuda a su interpretación, así como a la identificación de los datos y las relaciones más relevantes. Asimismo, es necesario proporcionar herramientas de interpretación y modelización (diagramas, expresiones simbólicas, gráficas, etc.), técnicas y estrategias de resolución de problemas como la analogía con otros problemas, la estimación, el ensayo y error, la resolución de manera inversa (ir hacia atrás), el tanteo, la descomposición en problemas más sencillos o la búsqueda de patrones, que les permitan tomar decisiones, anticipar la respuesta, asumir riesgos y apreciar el error en el proceso como una oportunidad de aprendizaje.

El desarrollo de esta competencia conlleva aplicar el conocimiento matemático que el alumnado posee en el contexto de la resolución de problemas. Tanto los problemas de la vida cotidiana en diferentes contextos como los problemas propuestos en el ámbito de las matemáticas permiten ser catalizadores de nuevo conocimiento, ya que las reflexiones que se realizan durante su resolución ayudan a la construcción de conceptos y al establecimiento de conexiones entre ellos. Asimismo, la resolución de un problema con distintas estrategias permite comparar las ventajas relativas a cada una de ellas. A través de la discusión de los estudiantes en la tarea de resolución de problemas se favorece la construcción de significados compartidos y la mejora del aprendizaje.

Vinculación con otras competencias

Las competencias específicas CE.M.1, CE.M.2, CE.M.3 y CE.M.4 están directamente relacionadas con la resolución de problemas y la modelización matemática en contextos diversos, por lo tanto, su desarrollo se vincula de forma natural. El desarrollo de esta competencia también tiene, por tanto, una íntima relación con las competencias específicas CE.M.5, CE.M.6 y CE.M.7, que lleva a relacionar los saberes de la materia de Matemáticas entre sí y con los de las otras materias, desde un enfoque globalizador. Por último, está relacionada con la competencia específica CE.M.9 en la gestión de las emociones que surgen cuando nos enfrentamos a un problema.

Sin ánimo de exhaustividad, se identifican vínculos con competencias de las asignaturas de Biología y Geología, como la CE.BG.4 (utilizar el razonamiento y el pensamiento computacional, analizando críticamente las respuestas y soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario, para resolver problemas…) y con Física y química, como la CE.FQ.1 (comprender y relacionar los motivos por los que ocurren los principales fenómenos fisicoquímicos del entorno, explicándolos en términos de las leyes y teorías científicas adecuadas, para resolver problemas…).

Vinculación con el perfil de salida

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.

Competencia específica de la materia matemáticas 2:

CE.M.2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.

Descripción

Tras la resolución de un problema, el alumnado tiende a dar por finalizada la actividad omitiendo una parte importante, que resulta ser muy constructiva. El análisis de las soluciones obtenidas en la resolución de un problema

potencia la reflexión crítica sobre su validez, tanto desde un punto de vista estrictamente matemático como desde una perspectiva global, valorando aspectos relacionados con la sostenibilidad, la igualdad de género, el consumo responsable, la equidad o la no discriminación, entre otros. Además, el análisis de la solución o soluciones, así como el camino realizado para resolver un problema ayuda a consolidar los conocimientos y desarrollar aptitudes para la resolución de problemas (Polya, 1965, Schoenfeld, 1985; Mason et al., 2010). Los razonamientos científico y matemático serán las herramientas principales para realizar esa validación, pero también lo son la lectura atenta, la realización de preguntas adecuadas, la elección de estrategias para verificar la pertinencia de las soluciones obtenidas según la situación planteada, la conciencia sobre los propios progresos y la autoevaluación.

El desarrollo de esta competencia conlleva procesos reflexivos propios de la metacognición como la autoevaluación y coevaluación, la utilización de estrategias sencillas de aprendizaje autorregulado, uso eficaz de herramientas digitales como calculadoras u hojas de cálculo, la verbalización o explicación del proceso y la selección entre diferentes métodos de comprobación de soluciones o de estrategias para validar las soluciones y su alcance.

Vinculación con otras competencias

Las competencias específicas CE.M.1, CE.M.2, CE.M.3 y CE.M.4 están directamente relacionadas con la resolución de problemas y la modelización matemática en contextos diversos, por lo tanto, su desarrollo se vincula de forma natural.

Sin ánimo de exhaustividad, se identifican vínculos con competencias de las asignaturas de Biología y Geología, como la CE.BG.4 (utilizar el razonamiento y el pensamiento computacional, analizando críticamente las respuestas y soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario, para resolver problemas…) y con Física y química, como la CE.FQ.1 (comprender y relacionar los motivos por los que ocurren los principales fenómenos fisicoquímicos del entorno, explicándolos en términos de las leyes y teorías científicas adecuadas, para resolver problemas…).

Vinculación con el perfil de salida

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas 3:

CE.M.3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.

El razonamiento y el pensamiento analítico incrementan la percepción de patrones, estructuras y regularidades tanto en situaciones del mundo real como abstractas favoreciendo la formulación de conjeturas sobre su naturaleza.

Por otro lado, el planteamiento de problemas es otro componente importante en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y se considera una parte esencial del quehacer matemático. El alumnado puedeplantear o inventar nuevos problemas en distintos momentos del proceso de resolución de problemas: antes, durante y después del mismo.

La formulación de conjeturas y su comprobación o resolución se puede realizar por medio de materiales manipulativos, calculadoras, software, representaciones y símbolos, trabajando de forma individual o colectiva y aplicando los razonamientos inductivo y deductivo. El razonamiento inductivo permite al alumnado explorar, conjeturar o generalizar ciertos resultados y, además, sustentan muchas de las argumentaciones que justifican la validez de una determinada conjetura en esta etapa. Para esto, el alumnado puede apoyarse en herramientas tecnológicas que permiten evaluar la misma para muchos casos particulares de una manera sistemática. El deductivo es el único tipo de razonamiento válido en matemáticas para demostrar una propiedad o establecer una conclusión, aunque es complicado que sea empleado con profundidad en esta etapa por el alumnado. No obstante, es posible avanzar hacia procesos de razonamiento más formales y abstractos fomentando destrezas como formular justificaciones para establecer la pertinencia de ciertas hipótesis, usar contraejemplos para rechazar conjeturas, razonar la imposibilidad de determinados hechos, utilizar el razonamiento recursivo o emplear líneas de razonamiento para un caso particular concreto que reflejen la idea esencial de una determinada demostración.

Así mismo, las prácticas argumentativas (orales o escritas) se producen cuando los estudiantes tratan de convencer a otros o a sí mismos de la validez de una conjetura, pudiendo emplear para ello, también materiales manipulativos, dibujos concretos o gráficos con mayor o menor grado de abstracción. Es interesante que el alumnado desarrolle la capacidad de realizar una argumentación coherente distinguiendo, entre todos los enunciados de la misma, las premisas, las conclusiones a justificar y las razones o garantías que validan ese paso y justifican la conexión entre las premisas y las conclusiones.

Por lo tanto, el desarrollo de esta competencia conlleva formular y comprobar conjeturas, examinar su validez y reformularlas para obtener otras nuevas susceptibles de ser puestas a prueba promoviendo el uso del razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas. Cuando el alumnado plantea nuevos problemas, mejora el razonamiento y la reflexión al tiempo que construye su propio conocimiento, lo que se traduce en un alto nivel de compromiso y curiosidad, así como de entusiasmo hacia el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia se relaciona con todas las competencias específicas de la materia de Matemáticas. En especial, tiene una conexión muy cercana con las competencias de resolución de problemas, CE.M.1 y CE.M.2, con CE.M.4, que incide en otro tipo de razonamiento, y con CE.M.8 que aborda aspectos de comunicación matemática. Por otro lado, el desarrollo de esta competencia matemática en razonamiento y argumentación debería tener como objetivo adicional que el alumnado la ponga en juego en el ámbito de su vida cotidiana y en otras áreas de conocimiento. Los vínculos que establezcan con competencias de otras materias deberían facilitar la transferencia a otros contextos y modos de razonamiento.

Sin ánimo de ser exhaustivo, el razonamiento matemático, la argumentación y la formulación de preguntas y verificación de conjeturas es básico en el desarrollo del pensamiento científico para averiguar las causas que originan los fenómenos del mundo natural y por eso tiene vínculos evidentes con las competencias específicas CE.BG.4 (Utilizar el razonamiento y el pensamiento computacional…) de Biología y Geología, CE.FQ.1 (Comprender y relacionar los motivos por los que ocurren los principales fenómenos fisicoquímicos del entorno…) y CE.FQ.2 (Expresar las observaciones realizadas por el alumnado en forma de preguntas, formulando hipótesis para explicarlas y demostrando dichas hipótesis…) de Física y Química.

Además esta competencia también está conectada con otras competencias específicas relacionadas con los procesos de argumentación para identificar la coherencia y pertinencia del argumento de un discurso y a detectar falacias argumentativas, como CE.LCTL.3 (Producir textos orales y multimodales con fluidez, coherencia, cohesión y registro adecuado…), CE.LCTL.5 (Producir textos escritos y multimodales coherentes, cohesionados, adecuados y correctos…) y CE.LCTL.6 (Seleccionar y contrastar información procedente de diferentes fuentes de manera progresivamente autónoma, evaluando su fiabilidad y pertinencia…) en Lengua Castellana y Literatura.

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas 4:

CE.M.4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.

Descripción

El pensamiento computacional entronca directamente con la resolución de problemas y el planteamiento de procedimientos, utilizando la abstracción para identificar los aspectos más relevantes, y la descomposición en tareas más simples con el objetivo de llegar a una solución del problema que pueda ser ejecutada por un sistema informático. Llevar el pensamiento computacional a la vida diaria supone relacionar los aspectos fundamentales de la informática con las necesidades del alumnado.

El desarrollo de esta competencia conlleva la creación de modelos abstractos de situaciones cotidianas, su automatización y modelización y la codificación en un lenguaje fácil de interpretar por un sistema informático.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia está directamente relacionada con la resolución de problemas y por lo tanto su desarrollo se vincula de forma natural al de las tres anteriores, CE.M.1, CE.M.2 y CE.M.3. La habilidad de identificar los aspectos más relevantes de un problema implica ser capaz de reconocer y conectar distintas ideas matemáticas (CE.M.5), y es un elemento esencial a la hora representar de la forma más adecuada procedimientos y resultados matemáticos (CE.M.7).

Se tienen nexos de unión con competencias de otras materias, como por ejemplo Biología y Geología (CE.BG.4. Utilizar el razonamiento y el pensamiento computacional para resolver problemas o dar explicación a procesos de la vida cotidiana relacionados con la biología y la geología), Física y Química (CE.FQ.2. (...) desarrollar los razonamientos propios del pensamiento científico y mejorar las destrezas en el uso de las metodologías científicas), Tecnología (CE.T.4. Desarrollar soluciones automatizadas a problemas planteados, aplicando los conocimientos necesarios e incorporando tecnologías emergentes, para diseñar y construir sistemas de control programables y robóticos), o Tecnología y Digitalización (CE.TD.5. Desarrollar algoritmos y aplicaciones informáticas en distintos entornos, aplicando los principios del pensamiento computacional e incorporando las tecnologías emergentes, para crear soluciones a problemas concretos, automatizar procesos y aplicarlos en sistemas de control o en robótica).

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas 5:

CE.M.5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.

Descripción

La conexión entre los diferentes conceptos, procedimientos e ideas matemáticas aporta una comprensión más profunda y duradera de los conocimientos adquiridos, proporcionando una visión más amplia sobre el propio conocimiento. Percibir las matemáticas como un todo implica estudiar sus conexiones internas y reflexionar sobre ellas, tanto sobre las existentes entre los bloques de saberes como sobre las que se dan entre las matemáticas de distintos niveles o entre las de diferentes etapas educativas.

El desarrollo de esta competencia conlleva enlazar las nuevas ideas matemáticas con ideas previas, reconocer y utilizar las conexiones entre ideas matemáticas en la resolución de problemas y comprender cómo unas ideas se construyen sobre otras para formar un todo integrado.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia trata de superar la excesiva compartimentación en temas, lecciones o bloques, tradicional en la enseñanza de todas las materias y en particular de las Matemáticas. Las competencias más vinculadas con esta competencia son las CE.M.1 (Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas…) y CE.M.2 (Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas…). En la enseñanza a través de la resolución de problemas tiene un lugar muy importante el margen que se da al alumnado para reflexionar sobre las situaciones presentadas y aportar soluciones que no necesariamente tienen que estar completamente ligadas al contenido que se esté trabajando en ese momento.

Adquirir esta competencia implica tener una visión global de las matemáticas lo que hace que estas tengan una aplicación mucho más potente en otras materias, particularmente en las de tipo científico como CE.FQ.1 explicar los fenómenos fisicoquímicos en términos de las leyes científicas adecuadas) o CE.BG.1 (Interpretar y transmitir información y datos científicos, argumentando sobre ellos…) pero también en otras como CE.T.2 (Aplicar de forma apropiada y segura distintas técnicas y conocimientos interdisciplinares…).

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.

Competencia específica de la materia matemáticas 6:

CE.M.6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.

Descripción

Reconocer y utilizar la conexión de las matemáticas con otras materias, con la vida real o con la propia experiencia aumenta el bagaje matemático del alumnado. Es importante que los alumnos y las alumnas tengan la oportunidad de experimentar las matemáticas en diferentes contextos (personal, escolar, social, científico y humanístico), valorando la contribución de las matemáticas a la resolución de los grandes objetivos globales de desarrollo, con perspectiva histórica.

La conexión entre las matemáticas y otras materias no debería limitarse a los conceptos, sino que debe ampliarse a los procedimientos y las actitudes, de forma que los saberes básicos matemáticos puedan ser transferidos y aplicados a otras materias y contextos. Así, el desarrollo de esta competencia conlleva el establecimiento de conexiones entre ideas, conceptos y procedimientos matemáticos con otras materias y con la vida real y su aplicación en la resolución de problemas en situaciones diversas.

Vinculación con otras competencias

Para identificar las matemáticas en otras materias es necesario ser consciente de lo que las matemáticas aportan al conjunto de saberes que se adquieren en la etapa. En este sentido, esta competencia está relacionada con todas las demás, si bien las mayores conexiones se dan con la CE.M.1 (modelizar problemas de la vida cotidiana) ya que los problemas "cotidianos" rara vez son puramente matemáticos e involucran a otras áreas del conocimiento. A consecuencia de esta conexión surgen otras ya que, si nos estamos enfrentando a un verdadero problema, se requiere de una cierta flexibilidad a la hora de aplicar diferentes técnicas. De esta manera, estaríamos conectando con la CE.M.2 (analizar las soluciones de un problema) y las competencias CE.M.3 (conjeturar) y CE.M.4 (pensamiento computacional). Lógicamente, una vez resuelto el problema, hay que comunicar adecuadamente el resultado del mismo, lo que pondría en juego la CE.M.8 (comunicar).

Particularmente, son las asignaturas del campo científico las que más vinculación pueden tener con esta competencia matemática, en particular en el caso de Física y Química, la CE.FQ.1 (explicar los fenómenos fisicoquímicos en términos de las leyes científicas adecuadas) y Biología y Geología, la CE.BG.1 (Interpretar y transmitir información y datos científicos, argumentando sobre ellos…). Las leyes científicas acostumbran a tener una formulación matemática, lo que hace necesario que el alumnado sea consciente de la necesidad de manejar bien la estructura matemática de que se trate para comprender bien el fenómeno físico de que se trate, modelizarlo adecuadamente y no cometer errores de interpretación de los resultados.

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.

Competencia específica de la materia matemáticas 7:

CE.M.7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.

Descripción

La forma de representar ideas, conceptos y procedimientos en matemáticas es fundamental. La representación incluye dos facetas: la representación propiamente dicha de un resultado o concepto y la representación de los procesos que se realizan durante la práctica de las matemáticas.

El desarrollo de esta competencia conlleva la adquisición de un conjunto de representaciones matemáticas que amplían significativamente la capacidad para interpretar y resolver problemas de la vida real.

Vinculación con otras competencias

La representación de los diferentes elementos matemáticos que aparecen en la enseñanza está ligada tanto a la resolución de problemas utilizando diversas estrategias o técnicas (CE.M.1) como a la utilización del pensamiento computacional (CE.M.4). Además, la capacidad de representar adecuadamente ideas matemáticas puede implicar la necesidad de conectar diferentes elementos matemáticos (CE.M.5). La representación tiene por objetivo la comunicación de los diferentes argumentos en lo que entran en juego las competencias relativas a comunicación (CE.M.8) y argumentación (CE.M.3).

El dominio de esta competencia implica fundamentalmente una adecuada visualización de las ideas y procesos matemáticos, este carácter marcadamente matemático no la aleja del resto de las asignaturas, siendo muy necesaria por ejemplo para el desarrollo de la competencia CE.TD.1. (Buscar y seleccionar la información adecuada proveniente de diversas fuentes, de manera crítica y segura, aplicando procesos de investigación…) puesto que, para un adecuado análisis de fuentes de información puede ser muy relevante identificar la coherencia de diversas informaciones que incluyen elementos matemáticos presentados en diferentes sistemas de representación.

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.

Competencia específica de la materia matemáticas 8:

CE.M.8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.

Descripción

La comunicación y el intercambio de ideas es una parte esencial de la educación científica y matemática. A través de la comunicación las ideas se convierten en objetos de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. Comunicar ideas, conceptos y procesos contribuye a colaborar, cooperar, afianzar y generar nuevos conocimientos.

El desarrollo de esta competencia conlleva expresar y hacer públicos hechos, ideas, conceptos y procedimientos, de forma oral, escrita o gráfica, con veracidad y precisión, utilizando la terminología matemática adecuada, dando, de esta manera, significado y coherencia a las ideas.

Vinculación con otras competencias

La comunicación de hechos matemáticos está relacionada principalmente con la producción de argumentos matemáticos en sentido amplio, lo que enlaza por un lado con la CE.M.7 (Representar ideas matemáticas), la CE.M.3 (razonamiento y argumentación aplicadas a la formulación de conjeturas) y la CE.M.4 (organización de datos vía el pensamiento computacional).

En otras materias como Lengua Castellana (CE.LC.3 y CE.LC.5) se desarrollan las competencias de producir textos orales y escritos con fluidez, coherencia, cohesión y registro adecuados. En Tecnología y Digitalización (CE.TD.4) se busca intercambiar ideas o soluciones a problemas tecnológicos o digitales y comunicar y difundir información y propuestas; también en Economía y Emprendimiento (CE.EE.5) se trata de presentar y exponer ideas utilizando estrategias comunicativas con una comunicación efectiva y respetuosa. En ambos casos, las ideas tecnológicas o económicas pueden tener un fuerte componente matemático.

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.

Competencia específica de la materia matemáticas 9:

CE.M.9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.

Descripción

La investigación en educación matemática distingue dentro del dominio afectivo entre emociones, actitudes y creencias. Las emociones son descritas como los estados afectivos menos estables y más intensos, que integran procesos fisiológicos, la experiencia subjetiva y procesos expresivos que modulan la interacción social; las creencias, como afectos muy estables y menos intensos, que se estructuran en sistemas; las actitudes, como un tipo de afecto intermedio, que se manifiestan como la disposición de una persona ante una tarea o un tipo de acción determinado. Estos estados afectivos, a los que otros autores añaden también los valores, motivaciones, normas sociales e identidad, no son entidades aisladas. De esta manera, las creencias influyen en las emociones que se originan ante la resolución de problemas, por ejemplo, y reacciones emocionales similares, reiteradas, dan lugar a la formación de actitudes. La relación es cíclica y compleja, lo cual no quiere decir que no haya que considerar aspectos afectivos en el planteamiento de situaciones de aprendizaje. Es esencial planificar estas situaciones para comunicar qué está pasando a ese nivel y tomar consciencia del propio papel como resolutores de problemas y aprendices de matemáticas. La idea general es que el alumnado que tiene una disposición positiva hacia las matemáticas tiende a experimentar emociones positivas en mayor medida que el alumnado con una disposición negativa. Esto quiere decir que todo el alumnado tiene que experimentar situaciones de éxito en la resolución de problemas. Ahora bien, no se ha de confundir con que no haya que ponerles en situación de bloquearse. Es importante que todo el alumnado tenga también la oportunidad de bloquearse en las situaciones de aprendizaje. Sin embargo, esto debe tener lugar en un ambiente adecuado, de confianza, respeto mutuo y cuidando las interacciones.

Los sistemas de creencias se conforman a partir de las experiencias vividas que, en este caso y en lo que compete al profesorado, son las situaciones de aprendizaje. A partir de esta experiencia, el alumnado adquiere, refuerza o modifica sus creencias acerca de las matemáticas como cuerpo de conocimiento (si son interesantes, aburridas, mecánicas, creativas, etc.), acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (si el profesorado debe explicar al alumnado de forma clara cómo hacer los ejercicios para luego repetirlos de forma mecánica, o si, por el contrario, el profesorado plantea situaciones a explorar, problemas que debe tratar de resolver el alumnado sin instrucción específica previa, si se habla en clase de matemáticas y se trabaja en grupo, etc.), acerca de uno mismo como aprendiz de matemáticas, el autoconcepto matemático, (no valgo para esto, se me dan mal), y creencias suscitadas por el contexto social (si a mi familia y amigos se le dan mal las matemáticas, a mí también). Estas creencias, como se ha mencionado, conforman sistemas. Por ejemplo, si el alumnado cree que la clase de matemáticas es repetir lo que acaba de explicar el/la docente en la pizarra, desarrollará o reforzará su creencia de que las matemáticas no son creativas.

El desarrollo de esta competencia exige un clima de aula favorable para que el aprendizaje, la construcción de conocimiento, tenga lugar a través de la resolución de problemas. La confianza en las capacidades de uno mismo se facilita en un clima de respeto y escucha a través de los procesos de comunicación y argumentación, en los que el error aparece de forma natural y puede ser una fuente de aprendizaje. Para entrenar la resiliencia es necesario proporcionar el tiempo necesario que permita perseverar en la resolución de problemas.

Esta competencia constituye un reto en los procesos de enseñanza y aprendizaje debido a que la formación de actitudes y creencias lleva tiempo. El profesorado debe ser consciente del impacto de su práctica de aula en ese sentido y debe planificar su impacto socioafectivo desde la elaboración de la programación, reflexionando acerca de las actitudes y creencias que está fomentando en el alumnado. Para evaluar esta competencia será clave la evaluación formativa, al igual que en el resto de las competencias. Es fundamental que el alumnado reciba información que le permita gestionar sus emociones en la resolución de problemas, asumir bloqueos, apreciar el error como una oportunidad para el aprendizaje, perseverar, reconocer fuentes de ansiedad, etc. En ese sentido, además de la evaluación continua a lo largo del curso, se debe aprovechar el período de la evaluación inicial para identificar las actitudes y creencias con las que inicia el curso el alumnado, bien con actividades específicas o integradas en la práctica

de resolución de problemas. Con todo ello, se contribuye a desarrollar una disposición positiva ante el aprendizaje, con una motivación intrínseca, que facilita la transferencia de las destrezas adquiridas a otros ámbitos de la vida, favoreciendo el aprendizaje y el bienestar personal como parte integral del proceso vital del individuo.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia se enmarca en el eje socioafectivo y se refiere especialmente a la importancia que los factores afectivos tienen en el éxito o fracaso del aprendizaje matemático, así como la necesidad de crear un clima afectivo de seguridad en el aula. Se vincula directamente con la CE.M.10 pero realmente, con todas, a través de los procesos de resolución de problemas. Sin ánimo de exhaustividad, se relaciona también con competencias de otras materias, como CE.EF.3. (Compartir espacios de práctica físico-deportiva…) en Educación Física, CE.EPVA.5 (Realizar producciones artísticas individuales o colectivas con creatividad…) de Educación Plástica, Visual y Audiovisual, CE.MU.3 (Interpretar piezas musicales y dancísticas, gestionando adecuadamente las emociones…) de Música, CE.EVCE.4 (Mostrar una adecuada estima de sí mismo y del entorno…) de Educación en Valores Cívicos y Éticos, CE.EE.1 (Analizar y valorar las fortalezas y debilidades propias…) de Economía y Emprendimiento y CE.FOPP.1 (Comprender los procesos físicos y psicológicos implicados en la cognición, la motivación y el aprendizaje…) de Formación y Orientación Personal y Profesional.

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.

Competencia específica de la materia matemáticas 10:

CE.M.10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.

Descripción

El desarrollo de esta competencia implica trabajar los valores de respeto, tolerancia, igualdad y resolución pacífica de conflictos, para construir una cultura de aula en la que se aprende matemáticas a través de la resolución de problemas, en un ambiente sano de interacción donde se hacen visibles los procesos de pensamiento. Esta competencia se enmarca en el dominio de lo socioafectivo y enfatiza la importancia de mejorar las destrezas y habilidades sociales, valorando la diversidad, por medio de las estrategias puestas en juego en la comunicación y el razonamiento, en diferentes tipos de agrupamiento, parejas, pequeño grupo y gran grupo. La razón de ser de esta competencia se encuentra en el marco de una escuela inclusiva, donde las situaciones de aprendizaje están diseñadas de tal manera que se asumen las diferencias de aprendizaje y la diversidad, proporcionando un punto de entrada accesible para todo el alumnado y donde todo el alumnado puede progresar y profundizar, experimentando sensaciones de éxito al superar los bloqueos.

La cultura de aula tiene un impacto fundamental en la conformación de creencias del alumnado, tanto hacia las matemáticas, como hacia su enseñanza y aprendizaje. La formación de los pequeños grupos de trabajo en el aula es un aspecto clave a tener en cuenta. Se debe tratar que sean heterogéneos, puesto que, cuando se divide al alumnado en grupos homogéneos, se constata que esto frena el aprendizaje de aquellos con un ritmo más lento y, en cambio, no supone mejora para los que tienen un ritmo mayor. Por otro lado, cuando la formación de pequeños grupos de trabajo se deja al arbitrio del alumnado, lo único que se consigue es reproducir el statu quo de las agrupaciones que tienen lugar fuera del aula. Por estas razones, la formación de grupos visiblemente aleatorios de trabajo, con una alta movilidad, una vez se vence la resistencia inicial del alumnado, desemboca en un clima de trabajo participativo e inclusivo.

Un adecuado desarrollo de esta competencia repercute en la convivencia fuera del aula y dota al alumnado con herramientas y estrategias de comunicación efectiva y con las habilidades sociales necesarias para trabajar en grupo. La escucha activa, la comunicación asertiva, situaciones en donde se colabora de manera creativa, crítica y responsable y se aborda la resolución de conflictos de manera positiva, empleando un lenguaje inclusivo y no violento, resultan

esenciales en una formación integral del alumnado. Asimismo, se fomenta la ruptura de estereotipos e ideas preconcebidas sobre las matemáticas asociadas a cuestiones individuales, como, por ejemplo, las asociadas al género o a la creencia de una aptitud innata para las matemáticas.

Vinculación con otras competencias

El desarrollo de esta competencia es paralelo al de la CE.M.9, con la que guarda una evidente relación. No obstante, los vínculos con el resto de competencias matemáticas son muy intensos, a través del proceso de resolución de problemas y su influencia (mutua) en el dominio socioafectivo.

En lo que respecta al resto de materias, es sencillo identificar oportunidades de conexión. A continuación, se nombran algunas posibilidades: CE.FQ.5 (Utilizar las estrategias propias del trabajo colaborativo…) de la materia Física y Química, CE.BG.3. (Planificar y desarrollar proyectos de investigación…) de Biología y Geología, CE.LCLT.10 (Poner las propias prácticas comunicativas al servicio de la convivencia democrática,...) de Lengua Castellana y Literatura, CE.TD.2 (Abordar problemas tecnológicos con autonomía y actitud creativa...) de Tecnología y Digitalización, CE.EE.2 (Utilizar estrategias de conformación de equipos, así como habilidades sociales,...) de Economía y Emprendimiento y CE.FOPP.4 (Conocer la dimensión social y antropológica del ser humano…) de Formación y Orientación Personal y Profesional.

Vinculación con el perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.

II. Criterios de evaluación

La evaluación del alumnado será formativa, continua e integradora y tendrá en cuenta su progreso en el conjunto de los procesos de aprendizaje. La evaluación debe cumplir, en primer lugar, una función de comunicación. Se trata de que el profesorado recoja evidencias del aprendizaje del alumnado y actúe en consecuencia con las estrategias didácticas y pedagógicas adecuadas, informando al alumnado de su progreso y cómo mejorar, así como a las familias y tutores legales. Los procesos de evaluación deben ser coherentes y estar alineados con la búsqueda de una cultura de aula inclusiva en la que el conocimiento se construye entre todos a través de la negociación de significados en un ambiente de resolución de problemas. Por lo tanto, otra función de la evaluación es la de empoderar esa cultura de aula y facilitar su conformación. Es decir, la evaluación no debe plantearse como algo ajeno a los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino como un elemento integrado. La observación y análisis de las producciones del alumnado, a partir de los instrumentos pertinentes, proporciona múltiples oportunidades para evaluar el desarrollo de cada competencia en relación con los diferentes saberes matemáticos.

Los criterios de evaluación que se presentan a continuación son el referente para evaluar el desarrollo de las competencias específicas. Se trata de criterios amplios, que han tratado de matizarse ligeramente en cada caso en función de los cursos y materias (Matemáticas, Matemáticas A y Matemáticas B). En cualquier caso, los criterios deben interpretarse en conjunción con las situaciones de aprendizaje que se planteen en cada curso y materia y en torno a los saberes de cada uno de los sentidos matemáticos.

CE.M.1
Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
Todas las competencias específicas de matemáticas están relacionadas en mayor o menor grado. Sin embargo, es tal la importancia del proceso de resolución de problemas, que puede decirse que la CE.M.1 junto con la CE.M.2 son el punto de encuentro de todas ellas. Estas competencias están relacionadas con todas las dimensiones de la competencia matemática: el razonamiento y la prueba, las conexiones, la comunicación y representación y las destrezas socioafectivas. Para la evaluación de esta primera competencia, se combinan varios criterios muy vinculados entre sí. En los cursos de primero a tercero, los tres criterios se resumen en interpretar el problema, escoger la estrategia adecuada y resolverlo. Para la interpretación del problema, las conversaciones en pequeño y gran grupo son esenciales en la construcción del conocimiento y proporcionan excelentes oportunidades para la evaluación formativa. Interviniendo con las preguntas adecuadas, el profesorado puede identificar la evolución en este aspecto. Así mismo, el criterio 1.1 también se puede aplicar analizando la coherencia del discurso matemático del alumnado con la utilización que hace del material manipulativo, las calculadoras o aplicaciones informáticas, así como el uso de gráficos, diagramas o tablas. Se trata de identificar aquellos momentos de la situación de aprendizaje donde se puede valorar si la interpretación es adecuada o si, por el contrario, debe actuarse planteando nuevas preguntas que conduzcan a la identificación de la cuestión principal. Para evaluar adecuadamente este criterio, es

indispensable que las situaciones y problemas sean variados, incluyendo tareas de respuesta cerrada, abierta, con múltiples caminos posibles de resolución, etc. En ningún caso debe marcarse como referencia para la evaluación la mera identificación de los datos de un problema, sino que debe considerarse la interpretación global. El alumnado debe relacionar de forma coherente y justificada los datos del problema sin realizar una combinación mecánica o aleatoria entre ellos. Además, tiene que comprender lo que se le está preguntando, para ello, tendrá que analizar entre otras cosas si es necesaria una solución exacta, una aproximación o basta con hacer una estimación.

En lo que respecta al criterio que se enfoca en el uso de herramientas y estrategias que se utilizan para resolver el problema, hay que tener en cuenta la aplicación de estrategias que el alumnado sea capaz de entender. No se tratará de aplicar una técnica concreta, salvo que se especifique con causa justificada. Entre estas estrategias, están la analogía con otros problemas, la estimación, el ensayo-error, la resolución de manera inversa, el tanteo, la descomposición en problemas más sencillos o la búsqueda de patrones.Por último, el criterio de evaluación que hace referencia a la obtención de la solución, está íntimamente ligado al criterio anterior e implica que la solución obtenida esté en el formato correcto, que responda a la pregunta que se ha planteado y que si es preciso se haya obtenido utilizando las tecnologías que en ese momento tengan a su alcance. A partir de cuarto curso, para realizar la evaluación, también será necesario que el alumnado sea capaz de reformular los problemas matemáticos de forma verbal y gráfica. Se les pide, además, más autonomía en la selección de las estrategias más adecuadas para resolver un problema.

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*
1.1. Interpretar problemas matemáticos organizando los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. 1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. 1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.	1.1. Reformular de forma verbal y/o gráfica, problemas matemáticos analizando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas. 1.2. Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas. 1.3. Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de un problema activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.	1.1. Reformular de forma verbal y gráfica problemas matemáticos, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas. 1.2. Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas en la resolución de un mismo problema, valorando su eficiencia. 1.3. Obtener todas las soluciones matemáticas de un problema movilizando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.

CE.M.2

Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista lógico y su repercusión global.

La resolución de problemas es el proceso sobre el que se construye el conocimiento matemático y se desarrollan las competencias. Al igual que ocurre con la CE.M.1, la evaluación de la adquisición de esta segunda competencia es clave para una buena evaluación formativa. Para ello, es imprescindible dejar tiempo al alumnado para dar por terminada una tarea. Este criterio, no debe referirse solamente a la solución o conclusión, sino al proceso seguido. Con el fin de evaluar este proceso, será imperativo facilitar espacios para la comunicación. En ocasiones, puede resultar relevante realizar una estimación de cuál o cuáles podrían ser las soluciones (o conclusiones o resultados de la exploración de una situación) antes de empezar el proceso de resolución.

Para evaluar la CE.M.2, se plantean dos criterios. En primer lugar, el uso del lenguaje científico y los diferentes tipos de representaciones, que deben ser los adecuados en cada curso. Por otra parte, la reflexión sobre la idoneidad de la solución o, en el caso de ser un problema abierto, la pertinencia, relevancia y alcance de las conclusiones. Esto incluye una profunda reflexión, dependiendo del contexto del problema, sobre cuestiones importantes como la igualdad de oportunidades o el consumo eficiente y responsable. Este criterio, debe ser más profundo a medida que se avanza de curso, estableciendo una sutil diferencia entre las matemáticas A y las matemáticas B de cuarto. En el segundo caso, se deben justificar las soluciones óptimas de un problema, esto implica una mayor concreción científica en los argumentos.

Por último, el alumnado tiene que tener también la capacidad de autoevaluarse y coevaluarse, para ello, se necesitan espacios para trabajar en pequeño grupo, en gran grupo y también deben quedar momentos de reflexión individual.

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*
2.1. Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema. 2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.).	2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema. 2.2. Seleccionar las soluciones óptimas de un problema valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).	2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema. 2.2. Justificar las soluciones óptimas de un problema desde diferentes perspectivas (matemática, de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).

CE.M.3

Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.

Para la evaluación del progreso de esta competencia se plantean tres criterios. El criterio 3.1 está enfocado a identificar el progreso del alumnado en la formulación de conjeturas y en la aplicación del razonamiento y argumentación para validarlas; el criterio 3.2, el progreso en la invención de problemas; y el criterio 3.3, el empleo de herramientas como materiales manipulativos, calculadoras, hojas de cálculo y software de geometría dinámica para la argumentación y justificación de conjeturas.

Se recomienda que la evaluación de los tres criterios se realice en un contexto de evaluación formativa aplicando estos criterios a partir de las situaciones de aprendizaje alrededor de los diferentes sentidos matemáticos en un ambiente de resolución de problemas. Es necesario que el alumnado se sienta en un ambiente propicio, de confianza, que facilite la espontaneidad e inspire seguridad. Una técnica de evaluación eficaz puede ser la observación de las actividades del alumnado durante el proceso de resolución de problemas y su participación en las puestas en común de las actividades y el análisis de sus producciones.

La aplicación del criterio 3.1 aparece de manera natural en un ambiente de resolución de problemas. El/la docente debe plantear situaciones que permitan la formulación de conjeturas y comprobación de las mismas. El proceso debe ser planificado por el/la docente que puede ejercer

de guía puntual. No obstante, es cuestión de identificar el progreso del alumnado en este aspecto, dejando tiempo para que las conjeturas sean formuladas por él y no por el profesorado, ganando poco a poco una mayor autonomía. Cuando se evalúa la argumentación, dependiendo de la situación, será importante tener en cuenta no solo la expresión verbal, sino la coherencia de esta, la progresiva identificación de las relaciones lógicas entre enunciados y el uso de materiales manipulativos, dibujos concretos, gráficos con mayor o menor grado de abstracción.

La aplicación del criterio 3.2. está relacionada con el planteamiento de nuevos problemas. Este puede realizarse de diferentes maneras. Puede ser mediante tareas en las que el/la docente presenta una información o muestra un dibujo o un gráfico y solicita al estudiante que elabore un problema. Estas tareas son generadoras de oportunidades de aprendizaje puesto que poseen respuesta abierta, se fomenta el pensamiento creativo y exigen que el alumnado reinterprete la red de conocimientos y competencias procedentes de situaciones de aprendizaje anteriores. Además, las conexiones a internet en el aula hacen posible que el alumnado encuentre datos reales e información para plantear una amplia variedad de problemas. En otras ocasiones, el planteamiento de nuevos problemas se realiza durante la resolución de un problema enunciado previamente como estrategia heurística, bien modificando las variables del problema original o reformulando en uno más sencillo que permita la resolución del problema original. Por último, el alumnado, al acabar de resolver un problema, puede plantear otro con la finalidad de generalizarlo mediante preguntas alternativas al problema (¿qué pasaría si...?) y explorar sus limitaciones o para evaluar si puede ser empleado en otros contextos. Estos nuevos problemas pueden ser evaluados a través de rúbricas en que se recojan aspectos como la cantidad de problemas que el alumnadoes capaz de plantear, la adecuación y originalidad de los mismos o la complejidad y riqueza matemática de los enunciados planteados. En cursos más avanzados, se pretende que estas modificaciones de enunciados tengan como propósito explorar las limitaciones del problema resuelto y generalizarlo a otras situaciones.

La aplicación del criterio 3.3. incide en que algunas conjeturas se pueden examinar fácilmente mediante el uso de herramientas tecnológicas. La disponibilidad de tecnología permite al alumnado lidiar con problemas complejos puesto que nos permite recopilar y analizar datos que, en el pasado, podrían haber sido considerados demasiado difíciles. Las calculadoras gráficas o determinados programas de software permiten al alumnado moverse entre diferentes representaciones de datos y calcular y utilizar números grandes o pequeños con relativa facilidad, en contextos de los sentidos numéricos, de medida, algebraicos y estocásticos. En el caso del sentido espacial, un software de geometría interactivo, como GeoGebra, permite establecer conjeturas en un contexto geométrico e indagar sobre su validez analizando casos de manera sistemática.

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*
3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones. 3.2 Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema. 3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.	3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones. 3.2 Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema. 3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.	3.1 Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada. 3.2 Plantear variantes de un problema que lleven a una generalización. 3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.

CE.M.4

Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.

Para evaluar esta competencia se plantean dos criterios muy relacionados: el criterio 4.1 está más orientado a la descripción y comprensión, centrado en el reconocimiento de patrones, mientras que el criterio 4.2. se enfoca a la parte más creativa de modelización y resolución, considerando también la modificación de algoritmos de resolución. Ambos criterios se mantienen más o menos constantes a lo largo de la ESO, añadiendo en el 4º curso la faceta de creación de algoritmos en el segundo criterio. Algunas situaciones para aplicar el criterio 4.1. pueden ser las que se proponen en las orientaciones del sentido algebraico, donde se plantean actividades de investigación de patrones: estudio de patrones geométricos y numéricos, descripción de los mismos a partir de casos sencillos, generalización de patrones, etc. Con respecto al criterio 4.2. tanto la modelización como la resolución de problemas, junto con la interpretación y modificación de algoritmos necesarios que los acompañan, son aspectos que se encuentran presentes prácticamente en toda actividad matemática con una mínima complejidad (modelización de situaciones a partir de modelos funcionales, algoritmos de cálculo eficientes, resolución de problemas geométricos, etc.). La generalización y creación de algoritmos mencionados en el criterio 4.2. para el 4º curso aparecen en contextos como, por ejemplo: problemas de optimización sencillos como los planteados en las orientaciones del sentido algebraico dentro del apartado de modelización, problemas de lugares geométricos, problemas de geometría analítica, los problemas de trigonometría comentados en las orientaciones del sentido de la medida (estos dos últimos aspectos para el caso de alumnado de la opción B), etc.

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*
4.1. Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional. 4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos.	4.1. Reconocer e investigar patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación y su tratamiento computacional. 4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando, modificando y creando algoritmos sencillos.	4.1. Generalizar patrones y proporcionar una representación computacional de situaciones problematizadas. 4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando, modificando, generalizando y creando algoritmos.

CE.M.5

Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.

La idea de que las matemáticas son un cuerpo interconectado de sentidos y saberes debería estar presente a lo largo de toda la etapa. Conectar los diferentes objetos matemáticos entre sí es imprescindible para aprender y es necesario planificar tareas específicas para ello. Para evaluar el desarrollo de esta competencia se plantean esencialmente dos criterios de evaluación. El primero de ellos (criterio 5.1) está enfocado al reconocimiento de relaciones entre los saberes matemáticos tanto del curso actual como con experiencias previas. El segundo

(criterio 5.2) tiene como objetivo evaluar si el alumnado es capaz de realizar estas conexiones que realiza el alumnado entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias. Por ejemplo, en las orientaciones para la docencia se propone el trabajo con el Teorema de Pick que permite la conexión entre la geometría y el álgebra. La evaluación diferenciada de ambos criterios es el matiz entre la realización de la actividad descrita con el Teorema de Pick como un ejercicio o su realización a través de la resolución de problemas. En el primer caso, no podremos evaluar si el alumnado es capaz de percibir esa relación geometría-álgebra, mientras que se espera que en el segundo sea posible que surjan comentarios acerca del significado del concepto de "variable" o de "incógnita" por ejemplo. La gradación por ciclos de los criterios es una cuestión del manejo de unos saberes matemáticos u otros. Es conveniente hacer explícitas las conexiones que vayan apareciendo, por ejemplo, entre las representaciones gráficas lineales y la proporcionalidad o entre las funciones y el álgebra.

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*
5.1. Reconocer y usar las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas formando un todo coherente. 5.2. Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias.	5.1 Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente. 5.2 Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.	5.1 Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente. 5.2 Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.

CE.M.6

Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.

Para evaluar el desarrollo de esta competencia se plantean esencialmente dos criterios de evaluación. El primero de ellos (criterio 6.1) está enfocado al reconocimiento y establecimiento de conexiones dentro de los propios saberes matemáticos, tanto del curso actual como con experiencias previas haciendo hincapié en la investigación científica y matemática. El segundo (criterio 6.2) tiene como objetivo evaluar las conexiones que realiza el alumnado con contextos en situaciones cercanas para el alumnado y con otras materias. El tercero (criterio 6.3) trata de valorar si el alumnado es consciente de la importancia de las matemáticas en el progreso de la sociedad. Ambos criterios están estrechamente vinculados y puede ocurrir que una situación de aprendizaje contemple conexiones de los dos tipos al mismo tiempo: y también se propone el trabajo con proyectos en el desarrollo del sentido estocástico que obliga a conectar técnicas de representación de datos, gráficas, significados de porcentajes. La gradación por ciclos de los criterios es simplemente una cuestión de matices. El proceso de establecer conexiones intra y extra-matemáticas es esencialmente el mismo a lo largo de toda la etapa. Lo único que cambia son los saberes correspondientes y la variedad de contextos. Esta variedad y la diferente profundización se puede ver a través del estudio del contenido matemático en la prensa, a través de noticias, infografías estadísticas… mientras en los primeros cursos nos ocuparíamos de los errores que se comenten en el uso de porcentajes, en cursos posteriores podríamos profundizar en la manipulación que se intenta llevar a cabo aprovechándose del desconocimiento del sentido estocástico del lector.

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*
6.1 Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados. 6.3 Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.	6.1 Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas, y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.2 Identificar y aplicar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias realizando un análisis crítico. 6.3 Valorar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución en la superación de los retos que demanda la sociedad actual.	6.1 Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas, y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.2 Analizar y aplicar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias realizando un análisis crítico. 6.3 Valorar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.

CE.M.7

Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.

Para evaluar el desarrollo de esta competencia alrededor de los procesos de representación se plantean dos criterios centrados en el proceso de representación: el criterio 7.1 centrado en la representación con propósito de resolución de problemas y el criterio 7.2 centrado en la representación con propósito de comunicación.

El primer criterio se refiere a la elaboración de representaciones (no necesariamente dibujadas) para la resolución de problemas, las cuales están muy vinculadas con los procesos de modelización inicial, como los que tienen lugar al enfrentarse con un problema con material manipulativo (por ejemplo, con el material polydron en Geometría o construyendo dados con pasta flexible en Probabilidad), con un dibujo o con una representación más abstracta (realizados en papel o con GeoGebra). Por ejemplo, en Geometría estas representaciones se trabajarían en la fase de orientación libre del modelo de van Hiele mientras que en Probabilidad tendrían lugar en una fase inicial de experimentación para acercarse al problema.

El segundo tiene que ver, entre otras actividades, con la elaboración de gráficos, tablas u otras representaciones como infografías destinadas a la transmisión de información matemática. De este modo, la evaluación de este criterio estará relacionada directamente con los tipos de representación que se lleven a cabo en cada curso. Por ejemplo, en Geometría estas representaciones se trabajarían, entre otros momentos, al utilizar material o dibujar para representar relaciones geométricas y comunicar resultados en la fase de explicitación del modelo de van Hiele, mientras que en Probabilidad se llevarían a cabo al elaborar un árbol que represente un experimento compuesto que permitan explicarlo.

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*

7.1 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada. 7.2 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información. .	7.1 Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos. 7.2 Seleccionar entre diferentes herramientas, incluidas las digitales, y formas de representación (pictórica, gráfica, verbal o simbólica) valorando su utilidad para compartir información.	7.1 Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos. 7.2 Seleccionar entre diferentes herramientas, incluidas las digitales, y formas de representación (pictórica, gráfica, verbal o simbólica) valorando su utilidad para compartir información.

CE.M.8

Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.

Para evaluar el desarrollo de esta competencia alrededor de los procesos de comunicación se plantean dos criterios estrechamente interrelacionados. El criterio 8.1 está más centrado en la producción y emisión de información matemática razonadamente, en cuanto al criterio 8.2, está más enfocado en el proceso de recepción de la información matemática que nos rodea. Respecto del primer criterio, cuando el alumnado trata de argumentar y explicar sus razonamientos o justificar sus conjeturas, se ve obligado a jugar con sus representaciones internas de los objetos matemáticos y a expresarse a partir de ellas. Serán los saberes de cada sentido los que permitirán articular situaciones de aprendizaje en las que el alumnado deba argumentar y comunicar sus razonamientos. La evaluación formativa proporciona múltiples maneras de aplicar estos criterios. El alumnado necesita que las situaciones de aprendizaje ofrezcan oportunidades para poner a prueba sus ideas dentro de un ambiente matemático de resolución de problemas orientado a la construcción compartida del conocimiento, con el objetivo de comprobar si comprenden y si sus argumentos son suficientemente sólidos. Por ello, una vía para desarrollar esta competencia es potenciar la conversación sobre las matemáticas, tanto en pequeño grupo como en el grupo-clase. Primero, mediante el lenguaje verbal natural, para luego, de forma progresiva, ir introduciendo vocabulario específico de las matemáticas y otras representaciones. En particular el modelo de van Hiele propone una fase específica, la explicitación, dedicada a que el alumnado comunique sus ideas matemáticas, esta organización metodológica se puede extender al resto de saberes ya que es el momento de comunicación cuando el profesorado tiene acceso a las dificultades de comprensión y expresión del alumnado. Respecto del segundo criterio, se debe animar al alumnado a realizar todo tipo de representaciones, sin restricciones para posteriormente formalizar las más convencionales. Esto puede hacerse también vía una construcción compartida del conocimiento, por ejemplo, cuando se presenta un nuevo tipo de gráfico estadístico, sin haber recibido instrucción previa, y se discute cómo puede interpretarse. Los matices en la evaluación de esta competencia no se limitan a los saberes de cada ciclo puesto que el vocabulario, sobre todo el formal, está en proceso de desarrollo, además la diferente utilización de las TIC en cada curso puede ser determinante también en el desarrollo de la comunicación, por ejemplo, utilizando programas y applets de geometría dinámica, pues posibilitan acciones que no se pueden reproducir con lápiz y papel. La gestión del aula, por parte del/de la docente, mientras se desarrollan las situaciones comunicativas es fundamental, integrando la evaluación formativa de los procesos de comunicación y representación. Se debe destinar un tiempo adecuado tanto a que los estudiantes respondan a preguntas abiertas de reflexión (explica cómo lo has hecho, ¿cómo lo has pensado?, ¿con qué podrías relacionarlo?, ¿por qué lo has hecho así?), de formulación de hipótesis (¿qué pasaría si…?) como a la formulación de sus propias preguntas ante la presentación, por ejemplo, de una fotografía que pueda contener información matemática (de tipo geométrico, por ejemplo).

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*
8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. 8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.	8.1 Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, con coherencia, claridad y terminología apropiada. 8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana y en diversos contextos comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.	8.1 Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, con coherencia, claridad y terminología apropiada. 8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana y en diversos contextos comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.

CE.M.9

Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.

Tanto la competencia CE.M.9 como la CE.M.10 se enfocan en la dimensión socioafectiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y están íntimamente relacionadas, ya que el dominio afectivo del alumnado se desarrolla en un contexto social. No obstante, puede decirse que la CE.M.9 está centrada en la evolución del dominio afectivo del propio estudiante, mientras que la CE.M.10 mira hacia las interacciones en el plano social. Para la evaluación de la CE.M.9 se plantean dos criterios. La aplicación del criterio 9.1 trata de evaluar el progreso del alumnado en la identificación y regulación de sus emociones, especialmente, ante el proceso de resolución de problemas, pero en cualquier otra situación relacionada con las matemáticas. Esta regulación contribuirá a desarrollar los sistemas de creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y sobre el autoconcepto matemático del propio estudiante, esto es, creencias acerca de uno mismo como aprendiz de matemáticas. El criterio 9.2 se centra en el progreso en las actitudes del alumnado hacia las matemáticas y hacia el aprendizaje de estas. Estos criterios ponen de manifiesto, más que nunca, el carácter formativo de la evaluación. Se trata de que la evaluación del dominio afectivo permita que el alumnado reciba información sobre cómo desarrollar afectos positivos hacia las matemáticas y apreciar que los bloqueos y desesperaciones forman parte natural de la resolución de problemas, así como a mantener una actitud proactiva ante nuevos retos matemáticos. La relación de lo afectivo con lo cognitivo es clara, y un adecuado tratamiento exige la creación de un clima afectivo de seguridad en el aula.

Para la aplicación del criterio 9.1 se pueden emplear instrumentos específicos, como el mapa de humor de los problemas (Gómez-Chacón, 2000a, 2000b), de manera que el alumnado exprese con un pictograma su estado emocional. Esto permite que el alumnado tome conciencia de sí mismo como resolutor de problemas, al mismo tiempo que se recogen evidencias de aprendizaje que pueden resultar de utilidad para organizar charlas de aula y adaptar las secuencias de enseñanza y aprendizaje.
En cuanto al desarrollo de actitudes, conviene tener en cuenta que se trata de un proceso complejo y que se extiende en el tiempo. Así como las emociones son afectos inestables e inmediatos (que se ven favorecidas por la actitud y las creencias), la formación de las actitudes y las creencias implica un trabajo continuo en lo emocional. Por ejemplo, si el alumnado experimenta sensaciones positivas en la resolución de problemas de forma continuada y aprende a asumir los bloqueos y a tomar la iniciativa en su superación, las actitudes que termina desarrollando son la de perseverancia, indagación, etc. En un ambiente de resolución de problemas, donde prima la interacción, se pueden emplear listas de observación para evaluar el criterio 9.2, que resulten manejables en el entorno de aula, donde se recojan, entre otros aspectos, la perseverancia en la resolución de problemas, la aceptación del error, la capacidad de comunicar los procesos seguidos, la confianza en sus capacidades, etc.

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*
9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	9.1. Identificar y gestionar las emociones propias y desarrollar el autoconcepto matemático generando expectativas positivas ante nuevos retos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas aceptando la crítica razonada.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático generando expectativas positivas ante nuevos retos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada, al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.

CE.M.10

Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.

Las competencias CE.M.9 y CE.M.10 se enfocan en la dimensión socioafectiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y están íntimamente relacionadas, ya que el dominio afectivo del alumnado se desarrolla en un contexto social. Mientras que la CE.M.9 está centrada en la evolución del dominio afectivo del propio estudiante, la CE.M.10 atiende a las interacciones en el plano social. Para comprender las implicaciones de esta competencia es necesario considerar que la resolución de problemas en matemáticas debe formar parte activa de la construcción de conocimiento. Para ello es imprescindible la creación de un clima de aula que fomente la interacción tanto en pequeño como gran grupo. Por lo tanto, se trata de hacer explícita la importancia de ejercitar destrezas y habilidades sociales, valorando la diversidad, por medio de las estrategias puestas en juego en la conversación y el razonamiento.
En la evaluación de esta competencia se pueden emplear técnicas similares a las de la CE.M.9, siempre en el marco de una evaluación de carácter formativo que proporcione indicaciones, tanto para el alumnado como para el profesorado. Para el alumnado, con el propósito que desarrolle la competencia en relación con los diferentes saberes que se ponen en juego en las situaciones de aprendizaje. Para el profesorado, con el objetivo de adaptar las secuencias didácticas y alinear los procesos de enseñanza y aprendizaje. Será conveniente la utilización de listas de observación, en el sentido que se refleja en las orientaciones para la evaluación, en las que se recoja, entre otros aspectos, la aceptación de puntos de vista ajenos, el grado y forma de participación e iniciativa o el nivel de compresión de los conceptos y la comunicación de los mismos en relación con las tareas.

Matemáticas (1º - 3º ESO)	*Matemáticas A (4º ESO)*	*Matemáticas B (4º ESO)*
10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas - en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa, tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Gestionar el reparto de tareas en el trabajo en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, responsabilizándose del rol asignado y de la propia contribución al equipo.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa, tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Gestionar el reparto de tareas en el trabajo en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, responsabilizándose del rol asignado y de la propia contribución al equipo.

III. Saberes básicos

III.1. Descripción de los diferentes bloques en los que se estructuran los saberes básicos

A. Sentido numérico

El sentido numérico es la habilidad para descomponer números de forma natural, emplear referentes numéricos de forma apropiada y ágil, usar las relaciones entre las operaciones aritméticas de manera flexible y creativa en la resolución de problemas, comprender el sistema de numeración posicional de base 10, estimar, dar significado a los números y reconocer su magnitud (Sowder, 1992). El desarrollo del sentido numérico es algo muy personal. No se relaciona únicamente con aquellas ideas y conceptos alrededor de los números que van surgiendo en el aula, sino

también con cómo se ha llegado a dichos conceptos y las conexiones que se establecen (Anghileri, 2006). El sentido numérico tiene que ver con una forma de pensar que conduce a identificar fácilmente esas conexiones.

Las actividades que realice el alumnado determinarán en gran medida sus actitudes y creencias tanto hacia los números como a las matemáticas y a la enseñanza y aprendizaje de éstas. En el caso del sentido numérico, si el alumnado termina asumiendo la creencia de que los números se usan para llevar a cabo las actividades de suma, resta, multiplicación o división que previamente les ha explicado el/la docente, aunque no comprendan por qué se hacen así, la actitud previsible del alumnado será pasiva. De esa manera, posteriormente apenas serán capaces de resolver problemas y utilizar los números de forma flexible, más allá de que algunos estudiantes tengan éxito en ello. En cambio, si se implementan secuencias didácticas a través de la resolución de problemas que comiencen poniendo en juego los conocimientos previos del alumnado y permitan el uso de estrategias propias al manejar los números y su conocimiento acerca de estos y las operaciones, el aprendizaje será significativo. En otras palabras, por el camino, el alumnado construye su propio conocimiento y establece conexiones, en este caso, entre las diferentes propiedades o relaciones entre los números y las operaciones.

La estimación de cardinales, ordinales o medidas, así como la estimación del resultado de un cálculo o una valoración de éste, son conocimientos matemáticos importantes que merecen la propuesta de situaciones de aprendizaje específicas. La estimación va mucho más allá de «adivinar» un resultado o una medida. Implica el uso de razonamientos y técnicas que deben desarrollarse como objeto de aprendizaje, pues la estimación contribuye de forma significativa al desarrollo del sentido numérico.

La construcción del significado va ligado siempre a la vía de la resolución de problemas. La definición de lo que es un problema en matemáticas es compleja y admite matices, pero siempre es algo mucho más que un ejercicio con contexto. Siguiendo a Blanco y Pino (en Blanco, et al., 2015), se pueden destacar los siguientes aspectos para que una actividad pueda ser considerada como problema: la necesidad de tener un objetivo al que no podemos llegar fácilmente con un proceso inmediato; las dudas y/o bloqueos generados por la situación planteada o por el desconocimiento de ese método claro que nos lleve a la solución; el aceptar el reto consciente para llegar a él lo que puede ser considerado por el resolutor como un desafío personal y uso de conceptos y procesos matemáticos. El alumnado debe ser consciente, al resolver problemas, de que suele haber diferentes maneras de resolverlo, de que se puede llegar al mismo resultado por caminos diferentes, de que puede haber diferentes soluciones a un problema, no existir solución, o que esta no sea numérica.

La resolución de problemas y la práctica de la técnica formal deben desarrollarse en paralelo. En lo referente a los problemas, se trata de situaciones que el alumnado tiene que resolver de manera autónoma, buscando sus propias estrategias y recurriendo, en un principio, al uso de manipulativos para representar la situación y emplear técnicas de recuento.

El «razonamiento proporcional» no solo hace referencia a la capacidad de resolver tareas de proporcionalidad. Este término debe asociarse a la capacidad de realizar argumentaciones y deducciones de manera comprensiva, más que con la habilidad para resolver determinadas tareas en las que se pueda tener éxito aún sin tener una comprensión suficiente de los conceptos involucrados. Es decir, el razonamiento proporcional está relacionado con los aspectos cognitivos de la proporcionalidad y ligado a la comprensión del número racional y sus distintos significados y a las estructuras multiplicativas con diferentes tipos de números. Un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional es clave para comprender los fenómenos asociados con la proporcionalidad y es precursor de otros sentidos como el algebraico ya que inicia al estudiante en la comprensión de la covariación entre cantidades de dos magnitudes relacionadas. Así, por un lado, el razonamiento proporcional implica dar significado a conceptos como el de razón entre magnitudes, el de porcentaje o la relación de proporcionalidad y reflexionar sobre las condiciones necesarias para que esta pueda suponerse y, por otro, implica la capacidad de resolver diferentes tareas en las que estos conceptos intervienen. Las tareas propuestas deben ir más allá de los clásicos problemas de valor faltante por lo que deben considerarse tareas de tipo cualitativo o de comparación de varias situaciones de proporcionalidad. Así, la resolución de problemas no rutinarios se convierte en una pieza principal del desarrollo del razonamiento proporcional. Por tanto, la enseñanza no debe basarse tampoco en técnicas concretas para cada tipo de problema si el propósito es convertir a los estudiantes en «razonadores proporcionales».

Como se ha mencionado anteriormente, las conexiones que pueden establecerse entre el sentido numérico y el sentido de la medida son evidentes. Tanto, que son sentidos cuyos saberes han de considerarse muchas veces de forma integrada. También se ha subrayado el impacto que tiene en el plano socioafectivo el enfoque de enseñanza y aprendizaje empleado, en aspectos como la confianza y el autoconcepto, los cuales terminan siendo determinantes en el plano cognitivo. Sin embargo, las conexiones del sentido numérico alcanzan todas las áreas de la matemática. Por ejemplo, en el sentido estocástico, las situaciones de aprendizaje en torno a la probabilidad y la estadística van a exigir desde recuentos y estimaciones hasta una nueva mirada de conceptos en torno al número racional y sus significados. Igualmente, encontraremos múltiples oportunidades de conexión con otras competencias. Sin ir más lejos, el hecho de que el alumnado exponga de manera oral las estrategias empleadas en la resolución de cierto problema permite desarrollar la competencia lingüística.

B. Sentido de la medida

El sentido de la medida nos permite comprender y comparar atributos o cualidades del mundo que nos rodea, por lo que forma parte de nuestra vida social, profesional y personal. Este sentido se caracteriza por la capacidad de contabilizar, comparar y estimar una cantidad de magnitud.

En la etapa educativa de educación primaria se trabaja el sentido de la medida a través de la experimentación en situaciones donde el alumnado manipula y reflexiona sobre las acciones que realiza para comparar, medir o estimar cantidades de magnitud. Asimismo, da soporte al sentido numérico en la construcción de los números racionales. En la etapa de educación secundaria obligatoria, sigue siendo fundamental la experimentación puesto que el sentido de la medida nos permite formular conjeturas, estudiar relaciones, deducir fórmulas y propiedades matemáticas, y generar referentes internos para realizar estimaciones. Así, los instrumentos de medida y las fórmulas de medición indirecta son la piedra angular sobre la que se apoya el desarrollo del sentido de la medida en esta etapa.

En los tres primeros cursos, los estudiantes deben ampliar sus experiencias de medición directa de áreas y volúmenes para profundizar su comprensión del área de figuras bidimensionales y del área y el volumen de objetos tridimensionales. Estas experiencias pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión sólida de las relaciones entre estas magnitudes y las unidades apropiadas para medirlas. Por otro lado, también se medirá de forma directa la amplitud angular que interviene en el desarrollo de la comprensión de las relaciones angulares y del concepto de semejanza. El uso de instrumentos de medida como la regla o el transportador de ángulos se verá reflejado en la realización de dibujos de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.

Las fórmulas y procedimientos de las mediciones indirectas deben desarrollarse a través de la investigación, sin caer en el error de facilitar una larga lista de fórmulas a memorizar. Para ello, los estudiantes deben dominar la composición y descomposición de figuras bidimensionales y tridimensionales para encontrar las longitudes, áreas y volúmenes de un objeto.

Por otro lado, también encontramos contextos y situaciones en las que existe una relación entre las cantidades de una misma magnitud o de distintas magnitudes, lo que nos permite determinar una medida desconocida a través de esta relación, por lo que podemos trabajar medidas indirectas con base en la proporcionalidad. Así, los estudiantes pueden usar la experimentación para explorar el concepto de semejanza a través de la medida. De esta manera, los problemas que involucran la construcción o interpretación de figuras u objetos a escala ofrecen la oportunidad de profundizar en los conceptos de semejanza, razón y proporcionalidad.

En muchas ocasiones cotidianas, no es necesario conocer la medida de un objeto, basta con una aproximación que sea útil. La estimación en medida permite desarrollar el sentido de la medida puesto que utiliza conceptos y procedimientos relativos a la medida y al cálculo (Segovia et al., 1989, Segovia y de Castro, 2013). El trabajo de la estimación está estrechamente ligado con el error cometido y debe concretarse cuándo éste es aceptable. Así, la estimación permite trabajar los conceptos de error absoluto y relativo, presentes en el conocimiento científico.

En el último curso de esta etapa académica, el sentido de la medida se trabaja a través de la trigonometría y el estudio de la tasa de variación media. La trigonometría nos permite calcular ángulos y distancias de forma indirecta en puntos o lugares inaccesibles. El trabajo realizado en los cursos anteriores, donde se aborda la medida indirecta de longitudes

y los criterios de semejanza entre triángulos, permite abordar el estudio de la trigonometría en este curso académico. Por otro lado, el estudio de la tasa de variación permite el trabajo de situaciones cercanas en las que intervienen distintas magnitudes.

Tal y como se puede deducir de lo escrito anteriormente, el sentido de la medida ofrece la oportunidad de aprender y aplicar otros saberes matemáticos: operaciones numéricas, ideas geométricas, relaciones, conceptos estadísticos y funciones. Por tanto, el sentido de la medida se puede desarrollar en relación con otros saberes matemáticos en vez de hacerlo de forma aislada.

Las conexiones del sentido de la medida con otras áreas son múltiples y variadas. Se vincula naturalmente con muchas otras partes del currículo a través de estudios sociales, científicos, artísticos o de educación física. Hemos de tener en cuenta que el papel de la medida en matemáticas presenta matices que hay que considerar y que son extensibles a cualquier proceso de modelización. Por último, no podemos perder de vista que la medida juega un papel fundamental en el progreso científico-tecnológico actual y en la evolución de la humanidad.

C. Sentido espacial

El sentido espacial es necesario para comprender y apreciar los aspectos geométricos de nuestro entorno. Implica representar y registrar formas y figuras, reconocer propiedades, identificar las relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos, sus transformaciones composiciones y descomposiciones.

Un buen sentido espacial debe ir necesariamente ligado a un buen sentido de la medida, algebraico y numérico. Los primeros pasos en geometría analítica se darán al final de la etapa, pero cimentados desde primer curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria con las coordenadas geométricas y la representación mediante gráficos de fenómenos como la proporcionalidad directa. Al finalizar la secundaria obligatoria, el sentido espacial también se relacionará con el concepto de función.

El sentido espacial no se basa únicamente en aspectos descriptivos y aplicación de fórmulas. Para su aprendizaje, se debe partir de la manipulación y visualización de los objetos geométricos de dos y tres dimensiones. Las fórmulas que permiten determinar medidas deben ser construidas de forma razonada. Esta manipulación incluye tanto la utilización de modelos concretos como programas de geometría dinámica.

Al igual que en la etapa de primaria, el modelo de razonamiento introducido por Dina y Pierre van Hiele (van Hiele, 1986) constituye un marco muy útil para el diseño de las situaciones de aprendizaje. En principio, el alumnado que proviene de primaria habría superado el primer nivel y estaría en diferentes grados de desarrollo del segundo o en los primeros grados de desarrollo del tercero. En secundaria se trataría de afianzar los niveles dos y tres, introduciendo el nivel cuatro en Bachillerato. Los cuatro niveles que pueden interesarnos los podemos describir de la siguiente manera:

Nivel 1: Visualización o Reconocimiento. Reconocer las figuras por su apariencia, sin que las propiedades de estas jueguen un papel explícito en la identificación. Las actividades correspondientes a este nivel van enfocadas a aprender vocabulario geométrico, identificar formas y reproducir figuras.

Nivel 2: Análisis. El alumnado identifica una figura mediante sus propiedades, las cuales se consideran independientes unas de otras. El alumnado propone definiciones enumerando varias características de una figura, posiblemente con omisiones y/o redundancias. Las justificaciones de estas propiedades se realizan en base a unos pocos casos particulares.

Nivel 3: Ordenación, clasificación o abstracción. El alumnado interrelaciona lógicamente propiedades de los conceptos, construyendo o siguiendo argumentos informales. En este nivel de razonamiento se conectan diferentes propiedades y se relacionan clases de figuras. De esta manera, se comprende que una clase esté incluida en otra (por ejemplo, el cuadrado es un tipo de rectángulo). Se pueden comprender demostraciones realizadas por el profesorado.

Nivel 4: Deducción Formal. El alumnado prueba teoremas deductivamente y establecen relaciones entre teoremas. Son capaces de demostrar un resultado de diferentes formas y de comprender la equivalencia entre resultados o definiciones.

Hay que ser conscientes de que se trata de niveles de razonamiento. Es decir, en el modelo de van Hiele, se considera que el aprendizaje es, fundamentalmente, una acumulación de experiencias. Por otro lado, no son niveles de desarrollo curricular, es decir, no es adecuado asignar a cada curso uno o varios niveles ya que alumnado del mismo curso pueden estar en diferentes niveles no solo en función de sus capacidades sino también en función de la enseñanza recibida anteriormente.

Otro elemento del modelo de van Hiele, son las fases de aprendizaje (descritas exhaustivamente en las orientaciones de 1º y 2º de ESO), facilitan el diseño e implementación de actividades que permiten progresar al alumnado hacia los siguientes niveles de razonamiento. Este es el motivo principal por el que se menciona este modelo en las orientaciones. El sentido espacial se debe trabajar a través de la resolución de problemas dando especial importancia a los procesos de razonamiento, comunicación, conexión y representación. Se evitarán las tareas repetitivas y la memorización de fórmulas o procedimientos sin una comprensión previa de aquello que se mecaniza.

D. Sentido algebraico y pensamiento computacional

En los primeros cursos de la ESO el alumnado va a encontrarse por primera vez de forma explícita con el lenguaje simbólico y abstracto del álgebra, el lenguaje en el que se comunican las matemáticas. El estudio del álgebra requiere un cambio en el pensamiento del alumnado: de las situaciones numéricas más concretas se pasa a la búsqueda de generalidades para representar y comprender relaciones cuantitativas entre cantidades variantes e invariantes. Es conveniente por lo tanto introducir el lenguaje algebraico partiendo de los conocimientos, tanto aritméticos como geométricos, del alumnado. Se debe mostrar al alumnado que el álgebra es un lenguaje útil en situaciones distintas, en particular para expresar generalizaciones de propiedades, caracterizar patrones y resolver problemas. Es decir, debe promoverse un aprendizaje significativo del álgebra, en el que el alumnado se irá familiarizando poco a poco con la manipulación de representaciones simbólicas a partir de su aplicación en contextos y situaciones variados.

Resumiendo las ideas anteriores, un posible enfoque a la enseñanza significativa del álgebra puede articularse en torno a los siguientes cuatro aspectos, que abarcan varios de los componentes básicos del álgebra de la educación secundaria:

- Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas
- Resolución de problemas
- Situaciones funcionales
- Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

De esta manera el sentido algebraico se desarrolla de forma transversal, conectado con otros aspectos del currículo de matemáticas y no como un bloque aislado del resto de saberes.

El pensamiento computacional y la modelización se han incorporado en este bloque, pero no deben interpretarse como exclusivos del mismo, sino que deben desarrollarse también en el resto de los bloques de saberes. Podemos observar que el desarrollo del sentido algebraico implica trabajar el pensamiento computacional. Esto es así puesto que más allá del uso de herramientas tecnológicas, las habilidades del pensamiento computacional incluyen el reconocimiento de patrones, el diseño y uso de abstracciones, la descomposición de patrones, la determinación de qué herramientas son adecuadas para analizar o solucionar un problema y definir algoritmos como parte de una solución. Por supuesto, también debe tenerse en cuenta que los avances tecnológicos permiten realizar cálculos y resolver problemas impensables en el pasado, por lo tanto, habilidades que han sido imprescindibles en décadas anteriores pueden no serlo ahora. Otra consecuencia de estos avances, por ejemplo, es la posibilidad de investigar y clarificar aspectos que con anterioridad quedaban fuera del alcance del alumnado de esta edad por su complejidad computacional. Es conveniente que el alumnado conozca y aprenda a manejar estas herramientas tecnológicas, y reconozca su aplicabilidad en los contextos apropiados.

E. Sentido estocástico

El desarrollo del sentido estocástico está asociado a la alfabetización estadística y probabilística. La primera alude a la capacidad para interpretar datos, evaluarlos críticamente, realizar juicios y valoraciones para expresar opiniones respecto a información estadística, argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos. La segunda se

relaciona con la capacidad para acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente diversas situaciones de incertidumbre y riesgo del mundo real, ya sea en la vida cotidiana, política o en contextos científico-tecnológicos.

El sentido estocástico, tanto desde la estadística como desde la probabilidad, tiene como elemento importante y distinto de otros ámbitos de la matemática el trabajar con la variabilidad de las situaciones frente al determinismo, por lo que cobra especial importancia y es un sentido clave para crear una ciudadanía informada con suficientes conocimientos y competencias para que ante fenómenos aleatorios y tratamiento e interpretación de datos e informaciones sean personas difícilmente manipulables y sean capaces de tomar decisiones y formarse opiniones de forma crítica y razonable.

Varios autores señalan la importancia de desarrollar los siguientes aspectos para crear una ciudadanía con un sentido estocástico que les permita tomar decisiones en situaciones de incertidumbre: reconocer la necesidad de los datos para analizarlos y para evitar realizar juicios sin argumentación que pueden llevar a la confusión de ideas, el poder manejar esos datos utilizando diferentes representaciones (tablas, gráficos, estadísticos), percibir la idea de variable aleatoria como algo intrínseco a la estadística y reconocer los elementos que pueden influir en esa variación y aceptar que a veces esas variaciones no quedan explicadas, buscar, estudiar e investigar modelos que se ajusten a las distribuciones de datos y que permitan realizar inferencias y predicciones y controlar el error al realizarlas. Muchas de las ramas asociadas a las Ciencias y relacionadas con la medicina, la tecnología, la economía, la pedagogía, la psicología… trabajan a partir de colecciones grandes de datos para hacer predicciones y explicar situaciones, por lo que desarrollar el sentido estocástico en esta opción de las matemáticas es altamente recomendable. La separación entre estadística y probabilidad es artificial, puesto que en cualquier estudio estadístico hay una componente aleatoria. Por ello hemos de tratar de relacionar estos dos campos cuando sea posible, y en particular, en los proyectos del estilo de los que se referencian en las orientaciones para la enseñanza que también nos pueden permitir conectar las matemáticas con otras materias.

De los diferentes enfoques de la probabilidad (intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo y axiomático), se pretende en esta etapa completar los abordados en Educación Primaria, trabajando de forma más intensa con el laplaciano y el frecuencial y llegar a introducir el subjetivo y el axiomático, desarrollando entonces de forma simultánea el sentido de la medida junto con el estocástico. Se propone evitar la referencia constante a juegos de azar reales salvo para trabajar específicamente su peligrosidad, dada la creciente ludopatía entre los adolescentes como alertan en el informe INJUVE de 2020 (Instituto de la juventud de España, Ministerio de derechos sociales y agenda 2030) en el que se cifra en más de un 16% la proporción de jóvenes que declara jugar habitualmente a juegos de apuestas, especialmente en entornos económicos vulnerables.

Las actividades conviene que sean abiertas, que requieran de una búsqueda de datos, de hacerse preguntas sobre los resultados, de conectar los resultados recogidos con los modelos teóricos que los pueden explicar, cambiando tamaños de las muestras, dialogando sobre los cambios producidos e interpretando los parámetros de la distribución. En este sentido, las actividades deben diseñarse primero en torno a la experimentación física, después a la simulación con ordenador y tercero a la formalización matemática.

Tanto para los aspectos estadísticos como probabilísticos, las tecnologías de la información y la comunicación resultan fundamentales, tanto mediante la utilización de programas específicos (hoja de cálculo) como con applets que pueden encontrarse en internet, de forma que podamos centrar más el esfuerzo en la comprensión que en cálculo repetitivo de probabilidades o coeficientes de correlación. El acceso que nos proporciona internet a páginas web estadísticas que proporcionan datos y gráficos actualizados, de temas de actualidad y de interés para el alumnado es también un buen repositorio al que acudir para realizar actividades en aula que favorezcan el sentido estocástico.

F. Sentido socioafectivo

La influencia del dominio socioafectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha dado lugar a una intensa línea de investigación en educación matemática. Gómez-Chacón (2000b) recoge que esto es debido al fuerte impacto que tiene en cómo el alumnado aprende y emplea las matemáticas; a la influencia de los afectos en el autoconcepto como estudiante de matemáticas; a las interacciones entre dominio afectivo y cognición; a la influencia en cómo se estructura la realidad social de la clase; y a que puede constituir un obstáculo para el aprendizaje significativo.

Es clásica la categorización del dominio afectivo en creencias, actitudes y emociones (McLeod, 1992), tres componentes interrelacionados que se diferencian principalmente en términos de intensidad y estabilidad. Las creencias pueden definirse como las ideas que un individuo va conformando acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje a partir de las experiencias vividas (Blanco, 2012; Gil et al., 2005). Son bastante estables y difíciles de cambiar, ya que se forman a lo largo de los años. En secundaria, las investigaciones señalan que son comunes entre el alumnado algunas creencias hacia las matemáticas como disciplina (por ejemplo, las matemáticas son algo exacto y estático y tienen un carácter procedimental y algorítmico), algunas creencias sobre sí mismos como aprendices (por ejemplo, un bajo autoconcepto como aprendiz de matemáticas genera inseguridad y ansiedad ante una tarea, así como la atribución de fracasos a una supuesta baja capacidad y los éxitos a causas externas, como la suerte o la facilidad de la tarea), ciertas creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje (por ejemplo, el profesorado debe presentar los hechos, reglas y procedimientos para aplicar en las actividades y el aprendizaje se basa en la memorización de estos hechos y procedimientos y la repetición rutinaria de actividades prototípicas) y creencias suscitadas por el entorno social y familiar hacia las matemáticas (por ejemplo, que el desarrollo de la habilidad matemática está ligado a tener un talento innato o capacidades especiales que no tiene todo el mundo, lo que genera cierta disculpa ante la falta de competencia matemática).

Las actitudes son predisposiciones positivas o negativas que condicionan a un sujeto a percibir y reaccionar de un modo determinado ante los objetos y las situaciones con las que se relacionan (Hidalgo et al., 2004). Se distinguen entre actitudes matemáticas, ligadas al modo en que se utilizan las capacidades cognitivas en la resolución de tareas matemáticas, como la flexibilidad de pensamiento o el espíritu crítico, y actitudes hacia las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, bien a través del gusto, la satisfacción, el interés o la curiosidad hacia estas o bien, el rechazo, la frustración o su evitación en el itinerario escolar.

Las actitudes y creencias del alumnado hacia las matemáticas se relacionan con los estados emocionales que afloran en la resolución de problemas y les predispone a actuar de cierta manera. Las emociones son estados afectivos de alta intensidad, como las situaciones de bloqueo y desbloqueo durante la resolución de un problema o los sentimientos de satisfacción, disfrute, miedo o pánico durante ese proceso. Así, si un alumno o una alumna poseen una creencia negativa sobre las matemáticas o sobre su enseñanza, tenderán a mostrar sentimientos adversos hacia las tareas relacionadas con dicha materia, lo que les llevará a conductas de evitación o de rechazo de las mismas (Blanco, 2012). La ansiedad matemática es entendida como un sentimiento de tensión, miedo o aprehensión que surge al enfrentarse a las matemáticas y al trabajo matemático y varía su consideración entre una actitud y una emoción.

Además, otros autores (DeBellis y Goldin, 2006; Beltrán-Pellicer y Godino, 2020) incluyen también los valores para referirse a compromisos profundos por parte de los individuos, que pueden organizarse en sistemas muy estructurados, y que ayudan a establecer prioridades a corto plazo y tomar decisiones. Finalmente, otros autores se centran en aspectos como el interés y la motivación (Attard, 2014). Sin embargo, estos últimos pueden explicarse en función de los componentes anteriormente mencionados y no constituyen la esencia del dominio afectivo.

Numerosas investigaciones han constatado que no hay diferencia en el desempeño de alumnos y alumnas en matemáticas. Cuando las hay, son mínimas y restringidas prácticamente al ámbito de la visualización y orientación espacial. Estas, además, pueden explicarse en términos de condicionantes sociales, como los juegos y los deportes que desarrollan en su tiempo de ocio. Sin embargo, sí que hay diferencias importantes en torno al autoconcepto y la confianza en uno mismo entre alumnas y alumnos, que se traducen en la creación y mantenimiento de estereotipos de género (como el mito de que a los alumnos se les dan mejor las matemáticas que a las alumnas). El profesorado debe ser consciente de que muchas veces se produce una diferenciación por género de manera implícita, sin apenas ser consciente de ello (p. ej., la forma de plantear las clases). Es importante considerar la perspectiva de género, ya que los estereotipos se traducen más adelante en una menor participación de la mujer en ámbitos relacionados con las matemáticas y las disciplinas STEM, en general (Kaiser, et al., en Forgasz y Rivera, 2012; Macho Stadler, et al., 2020).

Por lo tanto, es fundamental que el profesorado despliegue estrategias para reforzar el autoconcepto de todo el alumnado, atendiendo no solo a la perspectiva de género sino a cualesquiera otras perspectivas de ámbito étnico y sociocultural. Es importante reforzar creencias positivas en el alumnado acerca de sus propias capacidades, evitando, por ejemplo, relacionar sus éxitos con la suerte.

La principal propuesta de actuación es desde el enfoque didáctico (Boaler y Sengupta-Irving, 2012; Macho Stadler, et al., 2020). Una concepción expositiva de las clases en la que el profesorado explica y el alumnado se limita a memorizar y a poner en práctica lo dicho por el/la docente promueve un ambiente competitivo e individualista. Especialmente, si, como suele pasar en esos casos, la evaluación es básicamente sumativa. Este ambiente, entre otras cosas, ocasiona desigualdades por género y por contexto social, haciendo que mucho alumnadorinda y se implique menos en su aprendizaje. Por el contrario, un enfoque abierto en el que se fomente la participación de todos el alumnado en la resolución y puesta en común de las tareas, se trabaje en grupo, se discutan las ideas libremente y no se penalice el error, sino que se utilice como oportunidad de aprendizaje, donde la evaluación sea esencialmente formativa, etc. mejora el aprendizaje de todo el alumnado. Igualmente, hay que considerar que la elección de contextos para las situaciones de aprendizaje sea inclusiva y variada.

En esta etapa, el alumnado ha desarrollado ya ciertas actitudes y sistemas de creencias hacia las matemáticas y hacia lo que es aprender matemáticas. De esta manera, cuando el alumnado está acostumbrado a un enfoque expositivo y se pretende seguir un enfoque didáctico abierto a través de la resolución de problemas se produce un cambio en la cultura de aula que puede generar cierta resistencia. Esta resistencia está recogida en la literatura (Brown y Coles, 2013; Sullivan, et al., en Watson y Ohtani, 2015) y ante ella se trata de actuar de forma coherente e insistente con el enfoque didáctico objetivo.

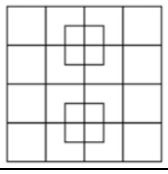
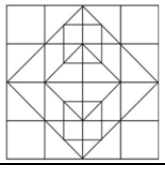
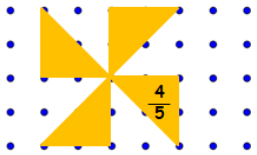
Las secuencias didácticas deben considerar momentos en los que se puedan identificar las emociones que siente el alumnado al resolver problemas. Por ejemplo, es habitual sentirse bloqueado cuando estamos ante un problema de verdad y no un ejercicio. Sin embargo, no todas las personas reaccionan de la misma manera ante dichos bloqueos. Las charlas de aula y las interacciones en pequeño grupo, convenientemente orquestadas, permiten al alumnado poner en común lo que ha pasado durante el proceso de resolución de un problema. También existen herramientas específicas para ello, como el «mapa de humor de los problemas» (Gómez-Chacón, 2000a, 2000b), que proporcionan información tanto al alumnado como al docente o a la docente de sus reacciones emocionales.

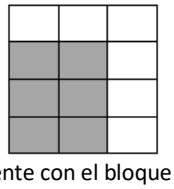
Por último, no hay que olvidar el papel de los referentes en el desarrollo cognitivo, afectivo y cultural. Los principales referentes del alumnado son personas de su entorno cotidiano (familia, compañeros y compañeras, y profesorado), es conveniente dar a conocer las matemáticas como una construcción humana y, en especial, la contribución de la mujer y diversas minorías, históricamente envuelta en dificultades. Una forma de hacer esto es abordar en clase la biografía de matemáticas y matemáticos de diferentes culturas, procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. Aunque esto último puede resultar complicado, cabe mencionar el legado de la aragonesa Andresa Casamayor, cuyo «Tyrocinio arithmetico» es el primer libro de ciencia escrito por una mujer en español que se conserva y que versa sobre operaciones básicas. Además de la biografía y logros de estos hombres y mujeres matemáticos, las programaciones didácticas pueden contemplar la realización de charlas y conferencias de hombres y mujeres matemáticos que relaten su experiencia.

II.2. Concreción de los saberes básicos

III.2.1. Matemáticas 1º de ESO

<table>
<tr><th colspan="2">A. Sentido numérico</th></tr>
<tr><td colspan="2">El sentido numérico comienza en la infancia y se desarrolla a lo largo de todas las etapas educativas. Al empezar la secundaria, el alumnado tiene que comprender los números en un sentido cada vez más amplio. Esto implica romper con creencias e incorporar nuevas formas de trabajar con cantidades, operaciones y relaciones. Para ello, el punto de partida debe ser la presentación de problemas contextualizados que precisen de saberes relacionados con el sentido numérico. Fomentar la utilidad práctica de los números, facilita una actitud mucho más activa hacia las tareas. A través de la historia de las matemáticas encontramos gran variedad de contextos para construir unas matemáticas coherentes.</td></tr>
<tr><td>Conocimientos, destrezas y actitudes</td><td>Orientaciones para la enseñanza</td></tr>
<tr><td>A.1. Conteo:
- Estrategias variadas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana.
- Adaptación del conteo al tamaño de los números en problemas de la vida cotidiana.</td><td>El desarrollo del sentido numérico tiene su punto de partida en el conteo. Muchos fenómenos cotidianos precisan de conocimientos matemáticos para ser cuantificados. Por ejemplo, realizar diagramas en árbol o tablas de doble entrada en contextos que nos resultan familiares como los emparejamientos deportivos. También se pueden realizar conteos en situaciones más complejas del tipo: ¿cuántos cuadrados ves?</td></tr>
</table>

	 
A.2. Cantidad: - Números grandes y pequeños: notación exponencial y científicay uso de la calculadora. - Realización de estimaciones con la precisión requerida. - Números enteros, fraccionarios y decimales y raíces en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana. - Diferentes formas de representación de números enteros, fraccionarios y decimales, incluida la recta numérica. - Porcentajes mayores que 100 y menores que 1: interpretación.	A través de la historia de las matemáticas, enseñamos formas de representar cantidades mediante los diferentes sistemas de numeración. Conocerlos -incluido el binario- ayuda a interiorizar el sistema decimal y a comprenderlo como una representación simbólica de un concepto mucho más amplio, el número o, mejor dicho, lo que este representa. El sistema sexagesimal, debe ser utilizado de forma contextualizada en todas las situaciones en las que tengamos que utilizar la medida del tiempo. Su aritmética no tiene que basarse en métodos mecánicos sino en su uso cotidiano. Para realizar las estimaciones, es importante que se sitúen las actividades en contextos que justifiquen la necesidad de tales aproximaciones, pudiendo dejar abierta al alumnado la elección del orden de aproximación. La calculadora puede utilizarse para comprobar la verdad o falsedad de las estimaciones realizadas. La introducción del concepto de fracción debe desligarse de la idea de parte-todo para darle un sentido más amplio y universal. No se trata de renunciar a este significado, útil para resolver ciertos problemas, pero sí de presentar el racional como número. Explicar que existen fracciones propias e impropias no contribuye a entender en forma extensa este conjunto de números. Es mejor comprender que un número racional puede ser además de un operador, el resultado de un reparto, el resultado de una medida, una razón y una probabilidad. Para ayudar al alumnado a ver el racional como número es importante crearle situaciones que den sentido a ese número, algunas de estas situaciones pueden ser preguntas de respuesta múltiple, en la que razonen la respuesta sin los procedimientos de pura operatoria, sino haciendo el esfuerzo por utilizar otro tipo de representación por ejemplo verbal o gráfica. ¿Cuántos palos completos de 3/4 m se pueden hacer con un palo de 17/4 m? A. Ninguno B. Cuatro C. Cinco D. Seis La invención de problemas (darles una operación sencilla de fracciones y proponerles que generen enunciados con un contexto determinado en los que tenga sentido esa operación) hace que surjan debates interesantes en el aula sobre el significado de los números racionales, y del sentido y capacidad de estimación del alumnado. Por último, otro recurso interesante para la comprensión de la fracción son las tareas que permiten el desarrollo del razonamiento “up and down” (Domenech y Martínez, 2019) ya que ponen en juego el valor de la unidad descomponiendo y componiendo la fracción lo que ayuda al alumnado a manejar el número racional con mayor sentido que solo operando aritméticamente. Por ejemplo: “Sabiendo que la región amarilla tiene una superficie de 4/5 de unidad, dibuja otra región que tenga como superficie 13/10 de unidad”.  Representa $\frac{13}{10}$ Siguiendo el trabajo realizado en Ed. Primaria, el modelo de reparto igualitario nos va a permitir conectar los sistemas de representación fraccionario y decimal del número racional positivo siguiendo el siguiente proceso: el reparto se realiza en fases de modo que en la primera fase se reparte el mayor número de unidades enteras y si quedan unidades sobrantes, éstas se fraccionan en 10 partes iguales y después se reparten. Si siguen quedando partes sobrantes, se vuelven a fraccionar en 10 partes iguales y se reparten, y así sucesivamente. Esta técnica del reparto está sustentada en el hecho de que los números naturales los expresamos en base 10 y que la medida de las cantidades de magnitudes las expresamos según el Sistema Métrico Decimal donde los sistemas de unidades y sus múltiplos o submúltiplos están relacionados mediante potencias de 10. En ese contexto de reparto, dadas dos fracciones a/b y c/d, también cobra sentido evaluar el significado de la fracción intermedia (a+c)/(b+d) entendida como el resultado de socializar dos repartos (Gairín y Sancho, 2002). En el ámbito científico encontramos expresiones con números grandes y pequeños. La expresión de números grandes y pequeños conlleva asociada conocimientos específicos de las potencias y la notación científica. Para desarrollar la capacidad de comprensión y manejo de estas cantidades se pueden considerar tres aspectos: establecer puntos de referencia, reconocer el tamaño relativo de los números y comprobar sistemáticamente si las informaciones numéricas son razonables. Para ello, debemos plantear situaciones donde el alumnado mantenga una actitud crítica ante la información que reciben, utilizando referentes conocidos y certeros para realizar una estimación que permita valorar si esta información recibida es razonable. Este tipo de actividades se pueden realizar en grupo, fomentando la discusión entre el alumnado y orientándose a través de preguntas como: ¿qué

	tipo de respuesta se espera?, ¿entre qué valores debe estar el resultado?, ¿es el valor obtenido razonable? (Gairín y Sancho, 2002). Se recomienda abordar en este curso solo los números muy grandes, dejando para el curso siguiente los números muy pequeños. Este trabajo se puede realizar junto al sentido de la medida a través de los problemas de Fermi, que aparecen en el bloque B.3. En cuanto a los números enteros, hay que ser consciente que su origen histórico está vinculado con el álgebra y la necesidad de manipular expresiones con letras. Se sugiere que los números enteros se introduzcan en un entorno algebraico para lo que es necesario trabajar simultáneamente este saber con el sentido algebraico y computacional, dotando de nuevos significados a los signos "+" y "-", reinterpretando las operaciones en términos de sumandos y sustraendos e incidiendo en el significado de resta como diferencia entre expresiones, frente a otros enfoques muy centrados en entornos aritméticos, puesto que en este ámbito se asume que un número solo puede entenderse como resultado de una medida, lo que parece ser un obstáculo para la aceptación de los negativos como números por parte de la comunidad de matemáticos (Cid, 2015). Por esto se recomienda precaución con la introducción escolar de los enteros a través de modelos concretos (deudas y haberes o pérdidas y ganancias, personas que entran o salen de un recinto o suben o bajan de un medio de transporte, temperaturas, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, ascensores, años antes o después de Cristo, posiciones y desplazamientos sobre la recta numérica., etc.). Aunque estos modelos puedan justificar algunas propiedades locales de los enteros, como la suma, también crean obstáculos o dificultades a la hora de realizar la construcción completa de la estructura de los números enteros como un anillo ordenado (Cid y Bolea, 2010). Los porcentajes combinan aspectos de fracciones y decimales y ofrecen otra forma de expresar un número racional. Son particularmente útiles cuando se comparan fracciones y también se encuentran con frecuencia en situaciones de resolución de problemas que surgen en la vida cotidiana. Al igual que con las fracciones y los decimales, las dificultades conceptuales deben abordarse cuidadosamente en la instrucción (NCTM, 2000). En particular, los porcentajes inferiores al 1 por ciento y superiores al 100 por ciento suelen ser un desafío, y es probable que la mayoría del alumnado encuentre situaciones cercanas que involucren porcentajes de estas magnitudes.
A.3. Sentido de las operaciones: - Estrategias de cálculo mental con números naturales, fracciones y decimales. - Operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales en situaciones contextualizadas. - Relaciones inversas entre las operaciones (adición y sustracción; multiplicación y división; elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas. - Efecto de las operaciones aritméticas con números enteros, fracciones y expresiones decimales. - Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo.	El uso extendido de las calculadoras obliga a poner el foco en el proceso y no en el resultado. Para comprender el orden de las operaciones, es útil describir situaciones que precisen de operaciones combinadas. Por ejemplo, que encuentren una situación que se resuelva con la operación $2\cdot(5+3)$ y otra con $2\cdot5+3$. En este curso, el trabajo con potencias puede limitarse únicamente al conjunto de los naturales. En la etapa de secundaria tendrán que comprender nuevos fenómenos en las operaciones: al multiplicar, ¿sale siempre una cantidad mayor? Lanzar esta pregunta puede abrir debate en clase. La búsqueda de ejemplos y contraejemplos lo enriquece mucho. Ayuda a la indagación acompañar este tipo de preguntas con tres opciones: "siempre es cierto", "nunca es cierto" o "a veces puede ser cierto". Más complicada todavía es la cuestión relativa a la división. Al dividir, ¿sale siempre una cantidad menor que el dividendo? El concepto de división como "reparto" les ha acompañado toda la primaria. Abstraer esta idea no es tarea fácil y no todas las personas lo perciben con la misma naturalidad. El reto de encontrar una situación cotidiana en la que no, desencadena aportaciones interesantes. Por ejemplo, "¿cuántos lápices de 0'20 € puedo comprar con 3€?" Las relaciones y operaciones entre números racionales admiten interpretaciones diferentes en función del significado que tengan dichos números racionales (Gairín y Sancho, 2002). Los problemas planteados desde el modelo de la medida deben abordar el análisis de las magnitudes que intervienen y la magnitud resultado de la operación. En el caso del producto, encontramos las operaciones de un número natural por una fracción, entendido como una suma reiterada de una cantidad de magnitud o la transformación de una cantidad en otra n veces mayor, y el producto de dos fracciones. En este último caso, se pueden considerar ambas fracciones como el resultado de una medida, por ejemplo: "¿Cuál es el área de un rectángulo que mide 3/4 m de largo y 2/3 m de ancho?" (ver figura abajo), o una fracción como resultado de una medida y la otra como un operador que modifica la cantidad de magnitud, por ejemplo: "Si bebes los 4/5 de una botella de agua de 3/2 de litro. ¿Cuántos litros de agua has bebido?" En la división, encontramos también estas dos situaciones: el cociente entre un número natural, entendida como el reparto una cantidad de magnitud en un número entero de partes iguales, o de disminuir una cantidad de magnitud un número entero de veces, y la división entre dos fracciones. La existencia de fracción inversa no se puede justificar desde el modelo de la medida, por lo que la opción más adecuada sería trabajar esta operación en problemas donde aparezcan relacionadas el área y la longitud. Por ejemplo: "El lado de un rectángulo miden 3/2 dm, si tiene un área de 6/5 dm^2, ¿cuánto mide el otro lado?"  Este modelo se debe trabajar conjuntamente con el bloque B.2. del sentido de la medida. Por otro lado, estas operaciones se deben enfocar desde el modelo del reparto igualitario. La suma de dos fracciones se puede abordar desde situaciones donde una persona participa en dos repartos o como la cantidad que reciben varias personas que han participado del reparto. En la resta, las situaciones que pueden plantearse resultan de la comparación de dos cantidades resultantes de dos

repartos diferentes o como la diferencia entre estas cantidades. La multiplicación de un número natural, n, por una fracción resultante de un reparto se interpreta como la cantidad que recibe una persona que participa en n repartos iguales y el cociente de una fracción entre un número natural se interpreta como la cantidad que recibe cada uno de los n individuos que se reparten la fracción que expresa la cantidad de un reparto anterior, es decir, es un reparto de un reparto. Para el producto de fracciones, una de las dos fracciones es un operador que modifica la cantidad de un reparto. En este modelo, no es posible darle significado al cociente entre dos fracciones, es necesario recurrir al modelo de la medida (Gairín y Sancho, 2002).

Por último, encontramos las operaciones con fracciones como significado de razón que se proponen a partir del siguiente curso académico.

Conviene resolver los problemas con fracciones apoyándose en representaciones gráficas que ayuden a la comprensión de los mismos y de las operaciones implicadas.

Además, las técnicas de la suma y la resta de fracciones deben mecanizarse lo menos posible. Para ello, es mejor buscar fracciones equivalentes de igual denominador de forma razonada y no necesariamente con el mcm de denominador. De nuevo, es preferible recurrir a ejercicios de cálculo sencillo. Una tarea interesante para asimilar esta operación se basa en el algoritmo voraz https://nrich.maths.org/6541. Consiste en buscar el menor número de fracciones con numerador uno que sumen una fracción dada. Es un reto que permite soluciones múltiples y distintos caminos para llegar a cada una de ellas. Es un buen ejemplo de tarea que es mejor realizar en grupos.

Se propone trabajar Los números enteros desde un entorno algebraico puesto que permite justificar las propiedades aritméticas gestionando operaciones y relaciones al apoyarse en el cálculo algebraico. Por este motivo, debe tratarse a través del sentido algebraico y computacional. Por ejemplo: Al empezar el colegio, María, Adrián y Luisa reciben el mismo dinero en su hucha. Entre septiembre y Navidad gastan o reciben las siguientes cantidades:

María	Adrián	Luisa
Recibe 10€	Gasta 5€	Recibe 10 €
Gasta 5€	Gasta 10€	Recibe 5 €
	Gasta 15 €	Recibe 15 €
	Recibe 30 €	Gasta 35 €

¿Quién tiene más dinero?, ¿quién tiene menos?, ¿en cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno? Si al empezar el colegio María tenía el doble que Adrián y éste 30€ menos que Luisa, ¿puede suceder que dos de ellos acaben con la misma cantidad de dinero? (Cid et al.2010).

Para trabajar operaciones inversas de cualquier tipo, existen multitud de ejercicios con cuadrados mágicos. “Completar el cuadrado de tal manera que el producto de filas, de columnas y de diagonales sea 1”.

p	q	r
s	1	t
u	4	1/8

A partir de allí podemos plantear más cuestiones como “determinar el valor de r+s”. Es un tipo de tarea rica, accesible para todo el mundo desde el principio y ampliable a cuestiones más complejas. (fuente: https://nrich.maths.org/10180)

El cálculo de raíces cuadradas se realizará como operación inversa trabajando los cuadrados perfectos y las aproximaciones por exceso o por defecto.

A.4. Relaciones:

- Factores, múltiplos y divisores. Factorización en números primos para resolver problemas: estrategias y herramientas.
- Comparación y ordenación de fracciones, decimales y porcentajes: situación exacta o aproximada en la recta numérica.
- Selección de la representación adecuada para una misma cantidad en cada situación o problema.
- Patrones y regularidades numéricas.

En este curso, la relación de divisibilidad tiene especial relevancia. Para que este concepto quede claro, además de conocer las definiciones de múltiplo y divisor, se debe recurrir a situaciones cotidianas en las que la divisibilidad está presente, “contar de tres en tres”, “hacer grupos de cuatro personas” … Además, la divisibilidad proporciona nuevas técnicas de resolución de problemas aritméticos y permite ampliar el campo de problemas y simplificar el proceso de resolución de algunos de los ya conocidos. Por ejemplo, “existen parejas de números tales que su producto es igual al de sus imágenes en un espejo como: $23 \cdot 64 = 46 \cdot 32$. Encuentra otras parejas de números que tengan esta propiedad. Trata de encontrar una regla que te permita obtener todas las parejas”.

Los números naturales se pueden representar de diferentes formas, por ejemplo, como números figurados. Si los disponemos en forma rectangular, los números primos solo admiten una representación de este tipo, mientras que los números compuestos se pueden representar utilizando diferentes rectángulos. Es así como podemos visualizar los divisores de un número.

Los ejercicios de buscar todos los divisores de los números utilizando métodos aritméticos, permiten al alumnado explorar atendiendo a sus intereses y capacidades. En algunos casos, serán capaces de encontrar divisores de forma eficiente, notando que solo tienen que probar para la mitad de los números, incluso con razonamientos todavía más ricos como: “si no es divisible entre 3, tampoco lo es entre 6” o “si es divisible entre 3 y entre 2, lo será entre 6”. Son muy interesantes las actividades

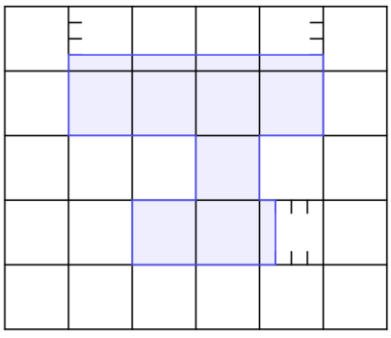
	de búsqueda de patrones y relaciones en la tabla de cien (Ruíz-López, 2000; González y Ruíz-López, 2003). Respecto a las fracciones, para ordenarlas, es recomendable combinar distintos métodos y no limitarse al denominador común, como podrían ser estrategias basadas en igualar numeradores o en comparación con fracciones de referencia. Las imágenes visuales de fracciones deberían ayudar al alumnado a pensar con flexibilidad al comparar fracciones. Por ejemplo, en un número determinado de sesiones, se pueden presentar al inicio de la clase una serie de fracciones e ir ordenándolas. Cada día utilizarán un criterio diferente. Por ejemplo, si comenzamos comparando 1/4 y 7/5 claramente, verán que la primera es más pequeña. Al día siguiente tienen que colocar la fracción 13/10 respecto a estas dos primeras. Se puede razonar de muchas maneras y pueden fluir ideas interesantes. Si se lleva 13/10 es posible que surja la necesidad de hacer una equivalente a 7/5 con denominador 10. El caso es que cada día se vayan intercalando nuevas fracciones y que esto genere un pequeño debate que sirve para repasar conceptos anteriores. Utilizar diferentes técnicas, enriquece su forma de pensar matemáticas. La comparación de fracciones y su ordenación puede hacerse a través del modelo de medida y del reparto igualitario, se propone un ejemplo en el siguiente curso. Al introducir las potencias, habrá que evitar el exceso de ejercicios repetitivos con propiedades de potencias. Es un concepto que se va a seguir trabajando en los tres primeros cursos, así que es mejor que comprendan su aritmética de forma comprensiva sin caer en la memorización excesiva de reglas. Por ejemplo, "escribe $3^5 \cdot 3^2$ de dos maneras diferentes". Este tipo de cuestiones pueden ir aumentando en complejidad a lo largo de la secundaria obligatoria. El trabajo de patrones y regularidades se debe hacer conjuntamente con el sentido algebraico y computacional, en particular con el bloque D.1.
A.5. Razonamiento proporcional: - Razones entre magnitudes: comprensión y representación de relaciones cuantitativas. - Porcentajes: comprensión y resolución de problemas. - Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, velocidad y tiempo, etc.).	Las magnitudes que pueden relacionarse de forma directamente proporcional son de naturaleza muy variada y aparecen en diferentes contextos. Para un adecuado desarrollo del pensamiento proporcional debe cuidarse la presentación de una amplia muestra de esta variedad fenomenológica: intercambios comerciales, situaciones científicas sencillas, porcentajes, aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, cambios de divisas, cálculos geométricos, escalas, etc. Además hay que prestar atención a presentar magnitudes de diferentes tipos: continuas, como la longitud, discretas, como el número de latas de un producto del mercado, intensivas, como la velocidad o la temperatura. Así mismo, se pueden presentar datos que no representen magnitudes a modo de distractor (por ejemplo, "en el portal 5 viven 23 personas", el número de portal no representa una cantidad de magnitud). Por otro lado, hay que presentar situaciones con relaciones diversas entre las magnitudes en vez de presentar de forma aislada y localizada en el tiempo solo situaciones proporcionales. Por ejemplo, se puede pedir analizar si hay o no magnitudes directamente proporcionales en situaciones como "El bebé tiene 2 meses y pesa 4 kg" (no proporcionales) o "Para dar de comer a 16 personas he necesitado 2 kg de arroz" (pueden suponerse proporcionales). De entre las formas de justificar si una relación entre magnitudes es de proporcionalidad directa hay que evitar siempre utilizar argumentos erróneos del tipo "a más de esto, más de lo otro" (o similares). Estos argumentos no permiten describir una relación de proporcionalidad directa, sino una relación creciente y, por tanto, además de inválidos pueden llevar a confusiones futuras y a la promoción de la ilusión de linealidad. Se propone utilizar justificaciones que acerquen la relación de proporcionalidad a la razón entre las magnitudes y, por tanto, a interpretar la constante de proporcionalidad, este será el paso en futuras etapas (no en primaria) para introducir la modelización algebraica de la proporcionalidad. Por ejemplo, en la situación "Para dar de comer a 16 personas he necesitado 2 kg de arroz", las magnitudes serán directamente proporcionales si doy la misma comida siempre a cada persona. Si suponemos esta condición viable podremos calcular y dar significado a "comen 8 personas con cada kg de arroz" o a "necesitamos 1 / 8 kg = 0,125 kg de arroz para dar de comer a cada persona". Por otro lado, no tiene sentido que el bebé engorde lo mismo cada mes, por lo que en el otro ejemplo las magnitudes no pueden suponerse proporcionales (Martínez-Juste, 2022). A partir del análisis de situaciones diversas pueden proponerse problemas variados en donde no necesariamente haya que calcular una cantidad desconocida. Por ejemplo, se pueden proponer (Martínez-Juste, 2022): Tareas de valor perdido, tareas de comparación cuantitativa y tareas de comparación y predicción cualitativa. En las tareas de valor perdido se conocen 3 datos de una proporción y se desea calcular un cuarto valor desconocido. En las tareas de comparación cuantitativa se comparan dos situaciones proporcionales en las que intervienen las mismas magnitudes, aunque con distintos valores conocidos. Ejemplo: para la realización de una obra A, 7 obreros tienen que trabajar durante 8 días. Sin embargo, para realizar una obra B, 4 obreros trabajarán durante dos semanas. ¿Qué obra requiere más trabajo? Y, por último, las tareas de comparación y predicción cualitativa son como las de comparación cuantitativa, pero sin conocer los distintos valores, lo que se conoce son las comparaciones entre ellos expresadas de forma cualitativa. Por ejemplo: Josan y Fran tienen cada uno una granja y necesitan comprar pienso para alimentar a sus gallinas. Josan tiene menos gallinas que Fran, ha comprado más pienso que él, pero le durará menos tiempo. ¿Qué gallinas comen más, las de Josan o las de Fran? El razonamiento proporcional también debe trabajarse con porcentajes a través de la resolución de problemas en distintas situaciones cercanas al alumnado. En este sentido es importante interpretar

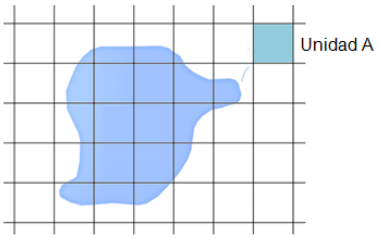
	el porcentaje como una relación entre dos magnitudes y conectarlo con los conocimientos sobre razón y proporcionalidad directa (Martínez-Juste, 2022). En el bloque A.6, encontramos un ejemplo. Trabajar los números racionales desde distintas perspectivas contribuye a que el alumnado se familiarice con la proporcionalidad. El trabajo del razonamiento proporcional implica reconocer cantidades que están relacionadas proporcionalmente y usar números, tablas, gráficos y ecuaciones para pensar en las cantidades y su relación (NCTM, 2000). Por ese motivo, este bloque está ligado al sentido algebraico y computacional. Asimismo, está relacionado con el sentido de la medida para calcular medidas de forma indirecta, por ejemplo, calcular la distancia real entre dos puntos en un mapa dibujado a escala, al usar la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro (en el sentido de la medida encontramos una tarea para encontrar el valor de como razón), etc.
A.6. Educación financiera: - Información numérica en contextos financieros sencillos: interpretación. - Métodos para la toma de decisiones de consumo responsable: relaciones calidad-precio y valor-precio en contextos cotidianos.	El trabajo con contextos económicos en el resto de sub-bloques del sentido numérico, especialmente los relacionados con el razonamiento proporcional presentados en el sub-bloque anterior debería bastar para cubrir los saberes del sub-bloque de Educación financiera. El cálculo e interpretación de la razón unitaria, o de otras razones normalizadas como el porcentaje, para comparar precios y ofertas permite tomar decisiones de compra responsable. Un ejemplo cercano puede ser el uso de las aplicaciones que nos muestran el precio de la luz dependiendo de la hora del día.

B. Sentido de la medida

El sentido de la medida en la etapa de Educación Primaria se ha trabajado a través de la experimentación en situaciones donde el alumnado manipula y reflexiona sobre las acciones que realiza para comparar, medir o estimar cantidades de magnitud y también ha dado soporte al sentido numérico en la construcción de los números racionales. En este primer curso de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, el alumnado debe continuar con el trabajo de la etapa anterior ampliando sus experiencias de medición directa de áreas y volúmenes para profundizar su comprensión del área de figuras bidimensionales y del área y el volumen de objetos tridimensionales. Las fórmulas y procedimientos de las mediciones indirectas deben desarrollarse a través de la investigación, sin caer en el error de facilitar una larga lista de fórmulas a memorizar. Como novedad, para desarrollar la estimación en el aula de secundaria utilizaremos los problemas de Fermi. En ellos, se solicita estimar el valor numérico de alguna o varias cantidades concretas sin proporcionar información sobre la naturaleza o características del contexto, ni ligarse a estrategias concretas de resolución.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
B.1. Magnitud: - Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos: investigación y relación entre los mismos. - Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida.	Las tareas de medida directa nos permiten trabajar las distintas magnitudes observables. Asimismo, debemos dejar en manos del alumnado la selección del instrumento de medida y de las unidades en función de la precisión requerida. Para realizar una medida directa, el alumnado debe reconocer los atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos, conocer las unidades, procesos y sistemas de medida y tomar decisiones sobre unidades y escalas adecuadas en problemas que impliquen medida. Se fomentarán la realización de trabajos de investigación como el que se propone a continuación para buscar relaciones entre diferentes cantidades de magnitud: Mide la longitud de la circunferencia de los siguientes objetos y anota cuánto miden. Se pedirá al alumnado que completen esta tabla para que observen la relación entre el radio y la longitud de la circunferencia. Radio = R | Diámetro = D | L = Longitud de la circunferencia | Razón

	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Observa la última columna. ¿Existe una relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro? ¿Reconoces el número aparece en la última columna? ¿Te acuerdas de la fórmula para calcular la longitud de una circunferencia? ¿Podrías deducirla a partir de lo que has observado en esta tabla? Por otro lado, la realización de actividades de medida donde no se especifique la unidad de medida a utilizar y que no esté incluida en el sistema internacional de medidas (SIM) pone de manifiesto la necesidad de unificar las unidades de medidas para una magnitud determinada. Asimismo, posibilita estudiar el contexto histórico en el que se desarrollaron las unidades de medida donde originariamente se utilizaban convenciones locales hasta que dejaron de ser eficaces y dieron lugar al SIM.
B.2. Medición: - Medición directa de ángulos y deducción de la medida a partir de las relaciones angulares. - Longitud de la circunferencia, áreas en figuras planas: deducción, interpretación y aplicación de fórmulas. - Representaciones planas de objetos en la visualización y resolución de problemas de áreas. - Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.	Las actividades de este bloque se desarrollarán a través de situaciones de comparación (directa e indirecta), ordenación, medida (tanto de cálculo como de construcción) y estimación (desarrollada en el bloque anterior). En la etapa de educación primaria se han trabajado las distintas magnitudes, pero la dificultad del área y el volumen requieren un trabajo profundo en secundaria. Por ese motivo, se recomienda trabajar y profundizar en este curso la noción de área en objetos bidimensionales dejando el trabajo con objetos tridimensionales para cursos posteriores a través de las distintas situaciones propuestas. La necesidad de una unidad de medida más pequeña o más grande se relaciona con el sentido numérico a través del concepto de múltiplo y submúltiplo. Es importante destacar la relación entre la medida y el tamaño de la unidad seleccionada para realizar dicha medición. Cuando planteamos una tarea de medir un objeto se debe responder bien a las siguientes cuestiones secuenciadas (Gairín y Sancho, 2002): ¿qué magnitud se considera?, ¿qué cantidad de magnitud se quiere medir?, ¿cuál es la unidad de medida?, ¿qué técnica de medición es la más conveniente?, ¿cuál es el grado de aproximación de la medida?, ¿cuál es el resultado de la medida? Esta última pregunta exige comunicar la medida en términos aceptables por el interlocutor y debe tenerse en cuenta el modo en el que se expresan las medidas en cada ámbito determinado. El número de materiales y recursos que pueden utilizarse en este apartado son muy extensos y variados (Moreno, 1998): Longitud: varillas, regletas, tiras de papel, cuerdas, distintas cintas de medir, clinómetro, calibrador métrico, altímetro, sombra de un palo, etc. Área: tramas, teselación, geoplanos, etc. Volumen: teselación del espacio, empaquetado, llenado, trasvase de líquidos, inmersión en líquidos, etc. Capacidad: vasos, recipientes, probetas, etc. Masa: balanzas de platillos, de resorte, canicas, arena, granos, etc. Tiempo: relojes de arena, cronómetros, velas graduadas, etc. Dinero: divisas. En el trabajo de medidas bidimensionales de forma directa encontramos una oportunidad para seguir avanzando en la comprensión del número racional, siguiendo la línea de trabajo de los cursos anteriores y que relaciona el sentido de la medida con el sentido numérico. En Hart (1981) encontramos un ejemplo de esto si utilizamos como unidad de medida de la superficie un cuadrado de la trama:  La medida no solo es el resultado de un cálculo o de una fórmula, es necesario realizar mediciones directas antes de dar el paso al álgebra puesto que da lugar a la comprensión de las nociones implícitas en este sentido. Podemos encontrar distintas estrategias para calcular áreas de figuras planas. Por ejemplo, el alumnado debería poder responder a la pregunta de qué es el área de un cuadrado sin contestar lado por lado. Es importante no utilizar única y exclusivamente las transformaciones de composición y descomposición, podemos plantear situaciones de medida para obtener un área a partir de teselaciones, rejillas con diferentes mallas (con cuadrículas, triangulares, hexagonales, etc.) o geoplanos, la fórmula de Pick, aproximaciones interiores y exteriores, etc. (Moreno, 1998). A continuación, se propone una actividad: El ibón de Piedrafita es uno de los ibones más accesibles del Pirineo Aragonés. Calcula su área con la unidad de medida A. ¿Cómo podríamos obtener una medida más precisa del área ocupada por el ibón de Piedrafita?



Esta silueta del ibón de Piedrafita está a escala y cada Unidad A de medida equivale a 2500 m^2 = 2,5 dam^2 = 0,25 hm^2. Es decir, es un cuarto de hectárea. ¿Cuál es el área del ibón de Piedrafita con unidades de Sistema Métrico Decimal?

Tras la realización de actividades de medida directa de superficies, se podrá continuar con el trabajo de deducción, interpretación y aplicación de las principales fórmulas para obtener el área de figuras geométricas.

Asimismo, es importante plantear actividades donde se reflexione sobre la relación de perímetro y área: Si el perímetro de la figura A es mayor que la figura B, ¿el área de la figura A es mayor que el área de la figura B? Podemos encontrar actividades interactivas de este tipo o de construcción de figuras con misma área y distinto perímetro, etc. en el siguiente enlace:
http://puntmat.blogspot.com/2015/01/perimetre-i-area-3.html

En el sentido espacial se aborda el trabajo de la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales. Es importante dar significado al teorema de Pitágoras a través del sentido de la medida atendiendo a que el área del cuadrado de lado la medida de la hipotenusa equivale a la suma de las áreas de los cuadrados cuya medida de los lados equivale a la medida de los catetos. Se puede realizar a través de una actividad manipulativa haciendo hincapié en las transformaciones que dejan invariante el área, es decir, en la conservación.

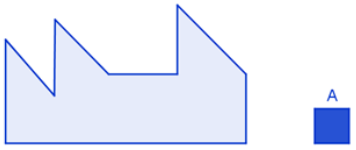
Por último, para poder afrontar con garantías conceptos geométricos presentes en el sentido espacial, como la clasificación de ángulos, triángulos o la semejanza, hay que realizar actividades de medición directa de amplitud angular e incidir en la conservación de la cantidad de amplitud angular.

B.3. Estimación y relaciones:
- Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.
- Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida.

La importancia de trabajar la estimación reside en la utilidad práctica que tiene en multitud de fenómenos y situaciones cotidianas. Por tanto, es importante saber estimar y valorar las estimaciones realizadas por otras personas (Gairín y Sancho, 2002). Sin embargo, estimar una medida con cierto grado de exactitud requiere la comprensión de los conocimientos matemáticos presentes en la medida de una cantidad de magnitud.

Entendemos la estimación de una medida como un proceso de medida sin uso de herramientas y sin un referente físico, pero con el conocimiento de los principios de medida (Joram, 2003; Joram et al., 2005; Pizarro, 2015). Así, para poder plantear tareas de estimación, es necesario haber realizado actividades prácticas de medida que permitan al alumnado tener ese referente interno. El trabajo de la estimación y las situaciones que se plantean deben estar ligadas a las magnitudes trabajadas en el aula.

Conviene distinguir entre estimación de magnitudes discretas y continuas y considerar si la cantidad de magnitud a estimar admite una organización espacial gráfica o manipulativa (como es el caso de la longitud, superficie o amplitud angular) o no (como es el caso del tiempo o la masa) (Segovia y de Castro, 2013). Además de considerar diferentes magnitudes, un buen diseño didáctico debe tener en cuenta las posibles situaciones que surgen. En Bright (1976) encontramos 8 situaciones de estimación distintas que están divididas en dos categorías principales: realizar una estimación y nombrar qué objeto tiene una determinada medida.

Realizar una estimación	Objeto presente	Objeto ausente
Unidad presente	Estima el área de la región poligonal con la unidad de medida A. También se pueden usar unidades de medida del SIM. 	Estima la cantidad de metros de cuerda que se necesitan para hacer una red de tenis.
Unidad ausente	En un rectángulo, dibuja la diagonal y estima su longitud.	Calcular el volumen de un contenedor de basura.

Nombrar objetos con una medida	Posibles objetos a estimar nombrados	Posibles objetos a estimar no nombrados

dada		
Objeto-Unidad presente	Damos un objeto que pese un kilo y preguntamos: ¿Cuál de los siguientes objetos tiene una masa de 2kg? A. Balón de fútbol. B. Bate de béisbol. C. Disco de hockey.	Construye un metro cuadrado. Nombra algún objeto que tenga 6 m^2.
Objeto-Unidad ausente	¿Cuál de los siguientes objetos tendría normalmente una temperatura más cercana a 10ºC? A. Cubo de hielo. B. Llama de una vela. C. Jaca.	Nombra algún objeto que tenga 7 dm.

A este tipo de situaciones descritas se pueden añadir el trabajo de los problemas de Fermi. Albarracín (2017) en su trabajo recoge problemas de estimación de grandes cantidades. El uso de grandes cantidades dificulta los recuentos exhaustivos o las mediciones directas, con lo que el alumnado necesita desarrollar estrategias alternativas para justificar sus estimaciones. Estos autores sugieren que para diseñar las actividades es recomendable utilizar problemas contextualizados en el propio centro educativo, considerando que la familiaridad con el contexto debería promover que los problemas sean más interesantes y accesibles, así como permitir que se pudieran efectuar las mediciones oportunas en un lugar accesible. En el artículo citado, se ejemplifican situaciones de estimación de la cantidad de personas que se pueden disponer en una cierta superficie. P. ej.: ¿Cuánta gente cabe en el patio? o de estimación de la cantidad de objetos que se pueden disponer en una cierta superficie o volumen. P. ej.: ¿Cuántos folios hay en un montón como el que está en la mesa del maestro? ¿Cuántos libros hay en estas estanterías?

El trabajo de la estimación está estrechamente ligado con el error cometido y debe concretarse cuándo éste es aceptable. En Chamorro y Belmonte (1988) encontramos que la estimación es aceptable si el error absoluto no supera el 0,1, es decir, el 10 por ciento de la medida del objeto, aunque el grado de error admisible depende de la edad del alumnado y la precisión en los resultados va evolucionando a lo largo de los años (Segovia y Castro, 2009).

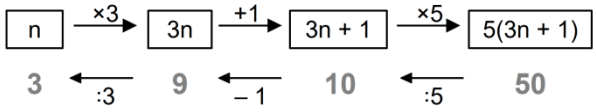
En el siguiente enlace tenemos una actividad interactiva que permite construir un ángulo de forma aproximada: https://nrich.maths.org/1235

C. Sentido espacial

Los elementos geométricos sujetos a estudio en primero de ESO son propios de la geometría plana, se analizarán sus propiedades y representaciones, así como las relaciones que existen entre ellos sobre todo en lo referente a formas geométricas planas y visualización, modelización y razonamiento. Para comprenderlos mejor, el uso de materiales manipulativos y herramientas informáticas como los programas de geometría dinámica son determinantes.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
C.1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones: - Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características. - Relaciones geométricas como la congruencia en figuras planas: identificación y aplicación. - Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…)	El modelo de van Hiele, explicado en sus implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje en Gutiérrez y Jaime (1998) sugiere usar cinco fases de instrucción para ayudar al alumnado a progresar en sus niveles de razonamiento. Ponemos un ejemplo de secuencia para trabajar los ángulos interiores de polígonos. La secuencia debe empezar con una introducción del profesorado en la que se haga una evaluación inicial de conocimientos y se presente el material con el que se va a trabajar. Tras esta fase, el alumnado primero recopila información trabajando con actividades concretas, de respuesta cerrada, aunque no necesariamente totalmente mecánicas (p. ej., midiendo los ángulos interiores de algunas figuras), mientras trabajan se les debe permitir hablar y se debe promover que comuniquen sus resultados a los compañeros y las compañeras, por ejemplo, mediante preguntas como ¿qué observas en los triángulos cuyos ángulos has medido? ¿Y en los cuadriláteros? Tras estas fases, vendría un trabajo más libre, menos guiado como ¿cuántos cuadriláteros diferentes eres capaz de construir con estas tres tiras de papel iguales como lados si sabes que hay tres ángulos rectos? En esta fase se reta al alumnado a pasar a tareas más complejas y a resumir y reflexionar sobre lo aprendido. El lenguaje utilizado por profesorado y alumnado es importante para el progreso de este último a través de los niveles, desde lo concreto a lo visual y a lo abstracto. El trabajo se cierra con una fase de institucionalización bien por el profesor o la profesora o con ayuda del alumnado del contenido de estudio, en este caso la suma de los ángulos interiores del triángulo y de otros polígonos y el proceso de obtención de los mismos. Si la enseñanza se basa exclusivamente en libros de texto, los ejemplos se limitan a figuras esquemáticas, y estereotipadas, lo que desemboca en obstáculos de aprendizaje muy serios. Por ejemplo, un cuadrado, cuando se gira, para gran parte del alumnado, deja de ser un cuadrado para convertirse en un rombo. Esto se puede evitar combinando este trabajo con el trabajo con materiales (recortando figuras, por ejemplo) o mediante la manipulación más abstracta de figuras en programas como GeoGebra. Estas dos estrategias pueden servir para transmitir de un modo más eficaz que un triángulo tiene tres bases (y por tanto tres alturas, tres medianas…) simplemente pegando en el cuaderno tres copias del mismo triángulo situados sobre cada lado. La manipulación del mismo

	triángulo con GeoGebra representa un nivel más avanzado de abstracción si bien ofrece la posibilidad de mostrar que las propiedades son válidas para cualquier triángulo. El trabajo con GeoGebra puede ser adecuado también para apoyar tareas de clasificación de polígonos, a este nivel se debe trabajar ya explícitamente la clasificación inclusiva de los mismos (expresada como que un cuadrado es un caso particular de rectángulo o que la clase de los cuadrados está incluida en la de los rectángulos). Por ejemplo, se puede dibujar un rectángulo en GeoGebra (vía su definición sobre la perpendicularidad de sus lados) y experimentar con él de modo que se observe de modo natural que, arrastrando sus vértices, se puede convertir en un cuadrado lo que implica que la nueva figura tiene al menos las propiedades del rectángulo, por lo que también lo es. Utilizando GeoGebra se puede trabajar la congruencia o igualdad de triángulos y las propiedades de los mismos. Se pueden proponer tareas de construcción de triángulos a partir de diferentes conjuntos de datos que lleven a la conclusión de la unicidad de la construcción según el conjunto de partida. Como hemos comentado antes, la utilización de GeoGebra supone un nivel de abstracción mayor lo que hace conveniente combinarlo en este caso con la construcción de triángulos con regla y compás. El trabajo con las áreas de polígonos sencillos mediante su disección para transformarlos en rectángulos equivalentes (de la misma área) supone un trabajo manipulativo que lleva a la justificación de las fórmulas del área. Este trabajo se debe empezar desde los triángulos acutángulos, rectángulos, obtusángulos, trapecios, rombos y polígonos regulares con número par e impar de lados. Siguiendo esta secuencia se puede obtener, mediante un paso a límite intuitivo, la fórmula del área del círculo. Esto permite evitar la perniciosa transmisión del área como un listado de fórmulas que reduce el estudio de la magnitud a la mera utilización aritmética de las mismas. Como se ha comentado en párrafos anteriores, el trabajo con GeoGebra es de sumo interés y puede apoyar (a posteriori) las reflexiones que surjan durante la tarea, para ello se pueden utilizar las animaciones del libro en GeoGebra de M. Sada (https://www.GeoGebra.org/m/VdVgERYy).
C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica: - Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. - Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria…).	Gonzato, Fernández-Blanco y Godino (2011) presentan una clasificación de las tareas de visualización adecuadas para los primeros cursos de secundaria: Distinguen cuál es el estímulo inicial (objeto presente o ausente), la acción a realizar (Convertir entre representaciones (plana o 3D), rotar, plegar o desplegar, composición y descomposición en partes o conteo de partes) y la respuesta (construcción, dibujo, identificación o verbal). En el currículo de Educación Primaria se proponen tareas como la representación de figuras construidas, por ejemplo, con policubos u otras piezas de construcción, de vistas cenitales, frontales, desde la base que son adecuadas también en primero de Secundaria. Si estas tareas han sido realizadas ya en Primaria, se puede continuar proporcionando solamente dos de las tres vistas y proponiendo la creación de todos los objetos que se ajusten a las mismas, lo que puede servir de punto de reflexión sobre la necesidad de utilizar las tres vistas.
D. Sentido algebraico y pensamiento computacional	
En el primer curso de la ESO el alumnado va a encontrarse por primera vez con el lenguaje simbólico y abstracto que es el álgebra. El estudio del álgebra requiere un cambio en el pensamiento del alumnado: de las situaciones numéricas más concretas se pasa a la búsqueda de generalidades para representar y comprender relaciones cuantitativas entre cantidades variantes e invariantes. Es conveniente por lo tanto introducir el lenguaje algebraico partiendo de los conocimientos, tanto aritméticos como geométricos, del alumnado. Se debe mostrar al alumnado que el álgebra es un lenguaje útil en situaciones distintas, en particular para expresar generalizaciones de propiedades, caracterizar patrones y resolver problemas. En resumen, debe promoverse un aprendizaje significativo del álgebra, en el que el alumnado se irá familiarizando poco a poco con las mecánicas de cálculo algebraico desde un punto de vista de resolución de problemas, la generalización de patrones y las situaciones funcionales.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
D.1. Patrones: - Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos.	La descripción de patrones proporciona situaciones de aprendizaje en las que de forma natural se aprecia la potencia del lenguaje algebraico para describir de forma precisa y simple una ley general. Es conveniente utilizar situaciones familiares para el alumnado, por ejemplo, utilizando patrones numéricos o geométricos. Aparte del estudio de patrones geométricos (ver un ejemplo en las orientaciones para 2º ESO) podemos apoyarnos en relaciones numéricas conocidas, como la secuencia de números pares e impares. Se introducen entonces de forma natural las expresiones 2n para los números pares y 2n – 1 para los impares, pudiendo apoyarse también la discusión con el uso de representaciones visuales. Esta investigación se puede extender, por ejemplo, pidiendo que se calcule la suma de varias parejas de números impares consecutivos y observando los resultados. 3 + 5 = 8 9 + 11 = 20 7 + 9 = 16 15 + 17 = 32 1 + 3 = 4 21 + 23 = 44 Se trata de llegar a responder el problema viendo que (2n – 1) + (2n + 1) = 4n. Es conveniente no subestimar el nivel de sofisticación requerido por el alumnado para interpretar correctamente este argumento. Como apoyo podemos utilizar representaciones visuales y tablas:

	<table><tr><th>n</th><th>2n – 1</th><th>2n + 1</th><th>4n</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>12</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td><td>16</td></tr></table> Se puede continuar considerando el resultado de sumar 3 ó 4 números impares consecutivos, etc. Éstas y otras ideas desarrollando el tema de pares/impares aparecen en https://donsteward.blogspot.com/2013/06/odds-and-evens-rules.html
D.2. Modelo matemático: - Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico. - Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.	Es conveniente modelar y resolver problemas contextualizados usando distintos tipos de representaciones, como gráficas, tablas y ecuaciones. La introducción de expresiones algebraicas debe ser paulatina, respondiendo al nivel de desarrollo algebraico del alumnado, y por lo tanto debería prestarse especial atención en este curso al trabajo con gráficas y tablas. Debemos tener en cuenta que el alumnado ya ha trabajado situaciones que se ajustan al modelo lineal en problemas de proporcionalidad directa, por lo que el estudio de este modelo es un buen punto de partida para realizar un trabajo más sistemático. En particular el trabajo con este modelo debería realizarse conjuntamente con el propuesto en el apartado A.5. Razonamiento proporcional del sentido numérico. El alumnado debe ser capaz de identificar las variables que intervienen en una situación y establecer si se trata de una relación de proporcionalidad o no. Es importante que el alumnado comience a relacionar las distintas representaciones de una función (tablas, gráficos, descripción verbal y ecuación) y sepa interpretar la constante de proporcionalidad en los distintos lenguajes. A la hora de escoger los ejemplos concretos sobre los que trabajar conviene incluir también situaciones en las que la constante de proporcionalidad no es un número entero o no es positiva. A lo largo del curso pueden introducirse otros modelos aun cuando no se haga un estudio sistemático de los mismos. Por ejemplo, podría estudiarse el modelo cuadrático asociado a problemas de áreas de rectángulos.
D.3. Variable: - Variable: comprensión del concepto en sus diferentes naturalezas.	El uso de tablas y representaciones gráficas en el estudio y modelización de situaciones en distintos contextos va a contribuir al desarrollo de una comprensión inicial de los diferentes usos de las variables. Por ejemplo, en las situaciones descritas anteriormente el alumnado puede comenzar a utilizar gráficos y tablas para analizar la naturaleza de los cambios en las cantidades en relaciones lineales.
D.4. Igualdad y desigualdad: - Relaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica. - Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas basados en relaciones lineales. - Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones en situaciones de la vida cotidiana. - Ecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología.	En este primer curso el objetivo ha de ser que el alumnado sea capaz de reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas y aprenda a resolver ecuaciones lineales. El trabajo con expresiones algebraicas sencillas aparece ya en el estudio de patrones, tanto numéricos como geométricos, y proporciona una primera oportunidad para reconocer y generar expresiones equivalentes. Es de gran importancia que el alumnado tenga la oportunidad de interpretar expresiones algebraicas, aparte de aprender a manipularlas y simplificarlas. Con este objetivo es conveniente ofrecer oportunidades para que el alumnado construya expresiones algebraicas en contextos diversos. En la página web de nrich (https://nrich.maths.org/8735), por ejemplo, se pueden encontrar varias ideas para construir y trabajar expresiones algebraicas. Con respecto a la resolución de ecuaciones lineales, en las que la incógnita solo aparece una vez se pueden aplicar estrategias aritméticas, como invertir el orden de las operaciones o la estrategia de "tapar". La idea de invertir el orden de las operaciones aparece por ejemplo al resolver problemas del tipo "Estoy pensando en un número, si lo triplico, le sumo 1 y después multiplico por 5 el resultado es 50. ¿Cuál era mi número?".  Este tipo de estrategias posiblemente resultará más familiar para el alumnado, y pueden contribuir a la comprensión de la estructura de una ecuación lineal. En lo que se refiere a los métodos generales para la resolución de ecuaciones, uno de los modelos más válidos para introducirlo es el de la balanza. Cada lado de la igualdad representa un plato de la balanza, y para mantener el equilibrio o igualdad cada manipulación que se haga en un lado de la balanza se debe hacer en el otro. Con las transformaciones realizadas sobre los platos de la balanza se puede modelizar el paso de una ecuación a otra equivalente, estableciendo el principio fundamental de que para mantener la igualdad se debe aplicar la misma operación en ambos miembros de la ecuación. La traducción de un problema a una expresión simbólica suele presentar dificultades para el alumnado. Por lo tanto, es conveniente no descuidar este aspecto y concentrarse excesivamente en

	cuestiones técnicas de resolución de ecuaciones. Estas técnicas pueden desarrollarse en conexión con problemas en los que la traducción a una expresión simbólica facilite su resolución. Observamos también que algunas de las dificultades del alumnado con el álgebra aparecen en conexión a problemas en el desarrollo del sentido numérico, como puede ser la falta de fluidez en el trabajo con fracciones o números negativos. Parece conveniente por lo tanto que, en una primera instancia, mientras se establecen las ideas básicas, se trabaje con tipos de número que resulten más familiares para el alumnado. Por otra parte, carece de sentido la utilización de técnicas de resolución en ecuaciones que pueden resolverse fácilmente por tanteo. Se propone por lo tanto utilizar decimales y números grandes, utilizando la calculadora si resulta conveniente.
D.5. Relaciones y funciones: - Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan. - Relaciones lineales: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas. - Estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.	El estudio de modelos elementales va a contribuir al desarrollo del concepto de función. En el apartado D.2. ya se ha mencionado el estudio del modelo lineal, junto con su identificación y el estudio de sus propiedades a partir de tablas y gráficas. En este primer curso sería conveniente alternar el estudio cualitativo y cuantitativo de los modelos funcionales, prestando especial atención, como ya se ha mencionado, al trabajo con gráficas y tablas. En el libro del Shell Centre for Mathematical Education (1990), disponible en https://sede.educacion.gob.es/publiventa/el-lenguaje-de-funciones-y-graficas/pedagogia/1065) se pueden encontrar excelentes secuencias docentes y sugerencias de actividades tanto para trabajar las características globales de las funciones desde un punto de vista cualitativo, como para aproximarse de forma reflexiva y significativa a aspectos cuantitativos (representación de puntos, elección y efecto de la escala en los ejes, representación de curvas a partir de tablas de valores, etc.). La introducción de expresiones algebraicas debe ser paulatina, respondiendo al nivel de desarrollo algebraico del alumnado. En este curso la relación entre gráficas y álgebra puede comenzar a explorarse a partir de la relación entre las coordenadas de los puntos de una recta. El uso de coordenadas resulta familiar para el alumnado y por lo tanto resulta más natural introducir la ecuación de una gráfica como una descripción de la relación entre las coordenadas x e y. Por ejemplo, a partir de las coordenadas de los puntos (0,0), (1,1), (2,2), (3,3) el alumnado rápidamente propone la ecuación $x = y$ ó $y = x$. La recta paralela por (0,3), (1,4), (2,5), (3,6) nos permite hacer la pregunta clave: ¿cómo encontramos la coordenada y a partir de la coordenada x? Observando puntos no consecutivos, como (4,7) y (10,13) podemos centrar la atención en la relación "se suman 3", que se representa de forma sucinta con la ecuación $y = x + 3$. Otro posible punto de partida sería comenzar con coordenadas de puntos de la recta $y = 2x – 1$, y conectarlo con la actividad sobre números pares e impares. Una vez determinada la ecuación de una recta, se puede observar cómo nos permite calcular las coordenadas para valores grandes o valores decimales. Posteriormente se puede pedir al alumnado que explore las representaciones gráficas de nuevas funciones a medida que vayan apareciendo, bien a mano o con ayuda de herramientas tecnológicas. Es decir, en este primer curso el alumnado debería comenzar a familiarizarse con las conexiones entre la ecuación, la tabla de valores y la gráfica de una recta.
D.6. Pensamiento computacional: - Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas a otras situaciones. - Estrategias útiles en la interpretación y modificación de algoritmos. - Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.	El pensamiento computacional se trabaja de forma más o menos directa en todos los saberes. En las orientaciones del resto de sentidos encontramos situaciones en las que se trabajan estrategias asociadas a la interpretación y modificación de algoritmos y la resolución de problemas. Por ejemplo: estrategias de conteo y de cálculo en el sentido numérico, desarrollo de estrategias de solución y estimación de medidas y relaciones entre ellas en el sentido de la medida, obtención de una fórmula o método para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono en el sentido espacial, etc. Con respecto al sentido algebraico, ya se ha comentado que su desarrollo implica trabajar el pensamiento computacional. Esto es así puesto que las habilidades del pensamiento computacional incluyen el reconocimiento de patrones, el diseño y uso de abstracciones o la descomposición de patrones. La propuesta de situaciones que pueden ser analizadas mediante programas u otras herramientas tecnológicas se plantea también en las orientaciones del resto de sentidos. Dentro del sentido algebraico, como se comenta en el apartado anterior D.5., en este curso el alumnado debería familiarizarse con la conexión entre la expresión simbólica de una función afín y su representación gráfica. Tanto este aspecto como la exploración de modelos lineales (proporcionalidad directa, etc.) pueden apoyarse en herramientas tecnológicas (como, por ejemplo, una hoja de cálculo, GeoGebra o la calculadora gráfica, Desmos).
E. Sentido estocástico	
Los elementos del sentido estocástico sujetos a estudio en primero de ESO incluyen el trabajo con diferentes tipos de gráficos y la introducción del trabajo con proyectos, así como la identificación de fenómenos deterministas y aleatorios junto con la profundización en el significado frecuencial de la probabilidad.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
E.1. Organización y análisis de datos: - Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucran una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales. - Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables	En los últimos años han surgido nuevos tipos de gráficos para transmitir visualmente la información de noticias, informes… esto permite –y obliga– a llevar a cabo tareas de elaboración e interpretación de gráficos estadísticos, con y sin ayuda de las TIC, incluyendo estos nuevos tipos. Los medios de comunicación tienen secciones en las que presentan estos gráficos, por ejemplo, el NY Times tiene la sección «What's going on in this graph» (https://www.nytimes.com/column/whats-going-on-in-this-graph), donde se invita a interpretar un gráfico y a inventarse un título para este. También la agencia de noticias Reuters tiene una página (https://graphics.reuters.com/) donde aparecen gráficos distintos de los habituales. La elaboración de gráficos sin ayuda de las TIC debe ser algo puntual ya

cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales. - Gráficos estadísticos: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...) y elección del más adecuado. - Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales. - Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.	que puede resultar muy costosa y limitar el tiempo de clase que se puede destinar a la interpretación de los mismos. En este curso, el trabajo con gráficos debe relacionarse con las medidas de centralización habituales (media, mediana y moda) para las que se requiere no solo el cálculo sino también su interpretación conjunta. Problemas como el propuesto en https://nrich.maths.org/mmandm proponen buscar todos los conjuntos de datos que verifican unas determinados valores para los tres parámetros, lo que constituye también un trabajo de búsqueda sistemática de resultados, un heurístico importante para la resolución de problemas. Es importante hacer hincapié en los problemas que presenta la utilización de cada parámetro de centralización. Por ejemplo, en http://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_6_meanmed.html podemos trabajar interactivamente la media versus la mediana.
E.3. Inferencia: - Formulación de preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población. - Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales. - Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.	Se considera que el trabajo en proyectos estadísticos puede resultar más motivador que trabajar de forma teórica la estadística. En estos proyectos se deben estudiar problemas prácticos utilizando datos reales para responder a preguntas concretas sobre temas de interés del alumnado. Batanero y Godino (2001) revisan las fases de un estudio estadístico (planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado) a la vez que señalan que "…el razonamiento estadístico es una herramienta de resolución de problemas y no un fin en sí mismo (…) la parte puramente "matemática" de la estadística (la reducción, análisis e interpretación de los datos) es solo una de las fases, y aún la interpretación ha de hacerse en función del contexto del problema planteado." alertando de la frecuente tendencia a centrar la enseñanza en las fases intermedias por considerarse más matemáticas, evitando una reflexión sobre el problema original. La fase de planteamiento de preguntas es una de las más difíciles y por ello debe recibir gran atención ya que el alumnado rara vez comienza con un problema claramente formulado. En cuanto a la recogida de datos, estos pueden ser accesibles a través de Internet, pero esta fase debe ser bien trabajada igualmente ya que el alumnado necesita también ser instruido en la selección crítica de los diversos sitios web a analizar. La última fase, relativa a la obtención de conclusiones, es de gran importancia ya que sin ella no tendría ningún sentido el haber dedicado tiempo a realizar un proyecto o estudio estadístico. Batanero y Díaz (2011) proponen varios proyectos que pueden ser llevados al aula directamente o previa adaptación a las circunstancias y niveles del alumnado de que se trate, por ejemplo, el proyecto "Comprueba tus intuiciones respecto del azar" sería apropiado para este curso.
E.2. Incertidumbre: - Fenómenos deterministas y aleatorios: identificación. - Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada. - La probabilidad como medida asociada a la incertidumbre de experimentos aleatorios. - Asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace.	El trabajo sobre la identificación de fenómenos deterministas y aleatorios puede ser un momento interesante para relacionar el sentido estocástico con otras áreas, contribuyendo a conectar las matemáticas con las ciencias, por ejemplo. En este sentido conviene mostrar la probabilidad como una rama de las matemáticas que da soporte al análisis de experimentos o procesos de resultado incierto. La combinación estratégica de significados de la probabilidad es otra de las cuestiones relevantes al comienzo de la Secundaria (Godino et. al, 1987). El significado frecuencial, asociado a la realización de experimentos, permite explorar situaciones complejas aun cuando no se tiene un sustento teórico suficiente para justificar el resultado. Si bien en Educación Primaria el currículo hace hincapié en el fomento del uso del lenguaje verbal para expresar el grado de creencia en la ocurrencia de diversos sucesos, en esta etapa se debe profundizar en dichos usos pues constituyen la base del significado intuitivo de la probabilidad. Por ejemplo, expresar las opiniones respecto a la ocurrencia de hechos como la lluvia o que tu equipo gane el próximo partido. Es interesante poner estas expresiones en relación con la cantidad de información de que se dispone (mirar el cielo o la clasificación del equipo) ya que esto conectará con el significado subjetivo de la probabilidad que será desarrollado formalmente en los últimos cursos de ESO. El trabajo con la regla de Laplace, que se inicia en tercer ciclo de Educación Primaria, se debe continuar profundizando en la conexión con el significado frecuencial vía la experimentación. Existe el riesgo de que la sencillez de la regla cree la falsa sensación de que todos los problemas se resuelven mediante su uso. Se propone diseñar materiales que eviten ese obstáculo como dados irregulares creados con pasta flexible y su utilización en diversos juegos como la carrera de caballos.

F. Sentido socioafectivo

El sentido socioafectivo está muy relacionado con la Competencia Personal, Social, y de Aprender a Aprender (CPSAA). El desarrollo de esta competencia implica, por una parte, plantear situaciones en las que el alumnado tenga la oportunidad de reflexionar sobre sí mismo, sus actitudes y sobre cómo se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, se debe atender también al desarrollo de las destrezas sociales, el trabajo en equipo y la creación de relaciones saludables. Dentro de las matemáticas la resolución de problemas es un elemento central, en el que de forma natural el alumnado se va a encontrar situaciones en las que deba enfrentarse a un reto, hacer frente a la incertidumbre, gestionar su estado emocional ante las dificultades y desarrollar actitudes de perseverancia y resiliencia. Para propiciar el

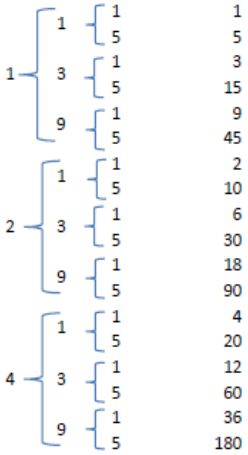
trabajo efectivo en estos aspectos es necesario establecer un clima en el aula en el que se favorezcan el diálogo y la reflexión, se fomente la colaboración y el trabajo en equipo, y se valoren los errores y experiencias propias y de los demás como fuente de aprendizaje.

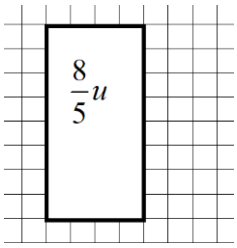
Otro elemento integral del sentido socioafectivo en las matemáticas es promover la erradicación de ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato. Con este objetivo se propone, por ejemplo, el uso de actividades que den lugar a un aprendizaje inclusivo (por ejemplo, tareas ricas o actividades de "suelo bajo y techo alto"). Por otra parte, hay que incluir oportunidades para que el alumnado conozca las contribuciones de las mujeres, así como de distintas culturas y minorías, a las matemáticas, a lo largo de la historia y en la actualidad.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
F.1. Creencias, actitudes y emociones: - Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación. - Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas. - Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.	La resolución de un problema significa comprometerse con la solución de una tarea para la que no se conoce previamente el método de solución. Al abordar los problemas, el alumnado tiene que razonar matemáticamente, emplear sus conocimientos matemáticos y en ocasiones, adquirir nociones matemáticas nuevas. La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas lleva aparejado el desarrollo de actitudes básicas para el trabajo matemático: perseverancia, flexibilidad, estrategias personales de autocorrección y de superación de bloqueos, confianza en las propias posibilidades, iniciativa personal, curiosidad y disposición positiva a la reflexión sobre las decisiones tomadas y a la crítica razonada, planteamiento de preguntas y búsqueda de la mejor respuesta, aplicando lo aprendido en otras situaciones y en distintos contextos, interés por la participación activa y responsable en el trabajo en pequeño y gran grupo. Para ello, no se trata, por tanto, de que el alumnado reciba instrucción directa sobre educación emocional, ni sobre los componentes de la dimensión afectiva en matemáticas (valores, creencias, actitudes y emociones) y sus diferencias, sino que en la práctica diaria de clase diseñada por el profesorado ponga en juego distintas estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo como favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas; revisar los pasos seguidos en la resolución de una tarea para plantearse si hay errores o si lo obtenido puede emplearse en otras situaciones; revisar las distintas resoluciones obtenidas, enfatizando en que no hay una única manera de resolver un problema; identificar en las tareas cuáles son los aspectos clave para su resolución y prever qué tipo de andamiaje ofrecer al alumnado en caso de bloqueo, etc.
F.2. Trabajo en equipo, toma de decisiones, inclusión, respeto y diversidad: - Técnicas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático. - Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos. - Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad. - La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde una perspectiva de género y multicultural.	El trabajo en pequeños grupos heterogéneos, de tres o cuatro estudiantes, a ser posible conformados de manera aleatoria, hace que el alumno o la alumna no se tenga que afrontar solo al problema que se plantea y se sienta más seguro al expresar sus ideas en condiciones de igualdad. No se trata de trabajar de forma cooperativa para elaborar un producto final que hay de entregar, ni de llevar a cabo roles específicos. Es cuestión de interactuar, de conversar entre iguales para discutir formas de abordar un problema, llegar a acuerdos. Cuando la cultura de aula incorpora de forma natural y cotidiana estas interacciones, las estrategias personales que pueda tener cada alumno y cada alumna de forma espontánea se ven ampliadas y enriquecidas, al mismo tiempo que obliga a utilizar un lenguaje matemático (en sentido amplio, atendiendo a sus diversos registros, desde el lenguaje oral hasta el simbólico-numérico, pasando por diagramas y esquemas) que comprendan los compañeros y las compañeras. En definitiva, hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. El profesorado debe asumir un papel fundamentalmente de guía que plantea preguntas abiertas al alumnado, preguntas ricas, que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás y a buscar recursos en el aula que necesiten para resolver el problema. También es vital dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. No es suficiente con lanzar la pregunta y acto seguido, a los pocos segundos, desvelar la respuesta. Otro aspecto a tener en cuenta por el profesorado es ser consciente del entorno individual y social del alumnado y usar ese conocimiento para conectar e integrar los contenidos a enseñar y los contextos de las tareas con los intereses reales del alumnado. Las matemáticas son una actividad característica de la especie humana, al igual que la literatura, el arte, la física o la música. Las matemáticas tienen un pasado, un presente y un futuro, y es importante que el alumnado sea consciente de la naturaleza viva de las matemáticas. Las matemáticas no son algo acabado, sino que, a lo largo de la historia, con la contribución de matemáticos y matemáticas del mundo se han ido construyendo las ideas matemáticas que hoy conocemos y que se encuentran en la base de todas las ciencias. Conocer la Historia de la Matemática conlleva, por una parte, entender mejor el desarrollo y motivación de conceptos e ideas en matemáticas, que en ocasiones aparecen desconectados entre sí dentro del currículo. Por otra parte, puede contribuir a cambiar la percepción del alumnado hacia la asignatura, haciéndola más cercana y coherente. Conocer su historia implica también comprender mejor el papel de las matemáticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, y les da un contexto. Por último, una perspectiva histórica nos permite abordar cuestiones como las dificultades de acceso a las matemáticas por parte de la mujer y otras minorías a lo largo de los siglos.

	Se puede hacer un primer acercamiento a la historia de las matemáticas procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. En este sentido, existen publicaciones que recogen diferentes secuencias didácticas para introducir la historia de las matemáticas en el aula de secundaria, como el monográfico de Barbin et al. (2018), Moyon y Tournés (2018) o la página web Convergence (https://www.maa.org/press/periodicals/convergence). También es posible encontrar otros materiales como lecturas o audiovisuales de contenido matemático, bien de ficción ("Figuras ocultas", "El hombre que conocía el infinito") o no ficción (podcasts, documentales, entrevistas, etc.).

III.2.2. Matemáticas 2º de ESO

A. Sentido numérico	
En este segundo curso, se van a manejar cantidades que precisan mayor grado de abstracción. Se utilizarán racionales positivos y negativos y en las potencias también se incorpora el uso de los exponentes negativos como notación. El eje vertebrador sigue siendo la resolución de problemas en los que los contextos puramente matemáticos son cada vez más habituales. El sentido de la medida y el sentido algebraico precisan de un buen dominio de saberes numéricos como las operaciones combinadas o las operaciones inversas. Ambos sentidos nos proporcionan infinidad de situaciones matemáticas que requieren de nuevas y mejoradas destrezas.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
A.1. Conteo: - Estrategias variadas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana. - Adaptación del conteo al tamaño de los números en problemas de la vida cotidiana.	Aprender a utilizar herramientas matemáticas que representan fenómenos también matemáticos, nos conecta con una de las principales utilidades de esta ciencia. Por ejemplo, para encontrar los divisores de un número se puede utilizar un diagrama en árbol. A través de este tipo de estrategias, además de enumerar todos los divisores, también deducen la forma de averiguar el número de divisores que tiene cualquier número. En el siguiente diagrama de árbol se recogen los divisores de 180.  1 → 1 → 1 1 → 5 → 5 1 → 3 → 1 → 3 1 → 3 → 5 → 15 1 → 9 → 1 → 9 1 → 9 → 5 → 45 2 → 1 → 1 → 2 2 → 1 → 5 → 10 2 → 3 → 1 → 6 2 → 3 → 5 → 30 2 → 9 → 1 → 18 2 → 9 → 5 → 90 4 → 1 → 1 → 4 4 → 1 → 5 → 20 4 → 3 → 1 → 12 4 → 3 → 5 → 60 4 → 9 → 1 → 36 4 → 9 → 5 → 180 También se deben trabajar otros ejemplos más cercanos: "En el colegio se va a realizar un campeonato de baloncesto con 12 equipos. Cada equipo debe enfrentarse contra todos los demás, ¿cuántos partidos se jugarán?"
A.2. Cantidad: - Números grandes y pequeños: notación exponencial y científica y uso de la calculadora. - Realización de estimaciones con la precisión requerida. - Números enteros, fraccionarios, decimales y raíces en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana. - Diferentes formas de representación de números enteros, fraccionarios y decimales, incluida la recta numérica. - Porcentajes mayores que 100 y menores que 1: interpretación.	En el trabajo en el aula, la calculadora comienza a ser habitual. Se debe manejar de forma eficiente y aprovechando todas las ventajas que su uso nos da. No obstante, cuando empieza a usarse para resolver problemas con cantidades muy grandes o muy pequeñas, es conveniente pedir una estimación del resultado y así dotarlos de herramientas de detección de posibles errores. El uso de la notación científica contribuye a que se comprenda el exponente negativo como tipo de notación. El manejo de esta clase de exponentes suele generar confusión y debe tratarse en un principio como una alternativa al uso de la notación decimal. Para desarrollar la capacidad de comprensión y manejo de estas cantidades se pueden considerar tres aspectos: establecer puntos de referencia, reconocer el tamaño relativo de los números y comprobar sistemáticamente si las informaciones numéricas son razonables. Para ello, debemos plantear situaciones donde el alumnado mantenga una actitud crítica ante la información que reciben, utilizando referentes conocidos y certeros para realizar una estimación que permita valorar si esta información recibida es razonable. Este tipo de actividades se pueden realizar en grupo, fomentando la discusión entre el alumnado y orientándose a través de preguntas como: ¿qué tipo de respuesta se espera?, ¿entre qué valores debe estar el resultado?, ¿es el valor obtenido razonable? (Gairín y Sancho, 2002). Este trabajo se puede realizar junto al sentido de la medida a través de los problemas de Fermi, que aparecen en el bloque B.3. En primer curso, es habitual que solo se utilicen las cantidades negativas con números enteros, limitando los racionales a sus valores positivos. En segundo, se extiende el racional a toda la recta. Conviene seguir en la línea sugerida en 1º ESO trabajando con sus diferentes significados, de forma que le den sentido al racional trabajando situaciones comopreguntas de respuesta múltiple, en la que razonen la respuesta sin los procedimientos de pura operatoria, sino haciendo el esfuerzo por utilizar otro tipo de representación por ejemplo verbal o gráfica. Un ejemplo: Una alfombra ocupa en m^2 … a) … más superficie que 1 m^2. b) … menos superficie que 1 m^2. c)… la misma superficie que 1 m^2 d)… imposible saberlo sin hacer cuentas.

	También la invención de problemas (darles una operación sencilla de fracciones y proponerles que generen enunciados con un contexto determinado en los que tenga sentido esa operación) hace que surjan debates interesantes en el aula sobre el significado de los números racionales, y del sentido y capacidad de estimación del alumnado. Por último, otro recurso interesante para la comprensión de la fracción son las tareas que permiten el desarrollo del razonamiento "up and down" (Domenech y Martínez, 2019) ya que ponen en juego el valor de la unidad descomponiendo y componiendo la fracción lo que ayuda al alumnado a manejar el número racional con mayor sentido que solo operando aritméticamente. Por ejemplo: la siguiente figura gris representa una superficie que mide 8/5 de unidad a) Representa la unidad "*u*" b) Construye un rectángulo que mida 7/4 u  De este modo seguimos potenciando que el alumnado vaya asumiendo que el racional es número susceptible de ser un resultado exacto en un ejercicio. Por otra parte, cuando se resuelve un problema de proporcionalidad, geométrico, algebraico o de otra índole, el resultado debe darse con el tipo de número o notación que consideremos más adecuado. En contextos económicos, por ejemplo, es necesaria una aproximación al orden de las centésimas. Lo mismo ocurre cuando aparecen cantidades irracionales, muy habituales en geometría, por ejemplo. En variaciones muy pequeñas, como los intereses bancarios se utiliza la notación en tanto por ciento. Los porcentajes son particularmente útiles cuando se comparan fracciones y también se encuentran con frecuencia en situaciones de resolución de problemas que surgen en la vida cotidiana. Al igual que con las fracciones y los decimales, las dificultades conceptuales deben abordarse cuidadosamente en la instrucción (NCTM, 2000). En particular, los porcentajes inferiores al 1 por ciento y superiores al 100 por ciento suelen ser un desafío, y es probable que la mayoría del alumnado encuentre situaciones cercanas que involucren porcentajes de estas magnitudes.
A.3. Sentido de las operaciones: - Estrategias de cálculo mental con números naturales, fracciones y decimales. - Operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales en situaciones contextualizadas. - Relaciones inversas entre las operaciones (adición y sustracción; multiplicación y división; elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas. - Efecto de las operaciones aritméticas con números enteros, fracciones y expresiones decimales. - Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo.	Utilizar la calculadora no debe desplazar al cálculo mental de su lugar en la clase de matemáticas. Las operaciones con potencias de diez multiplicando y dividiendo se deben hacer de forma razonada. Su relación con las fracciones decimales ayuda a comprender los procesos. Los ejercicios de calculadora con una "tecla rota", pueden mejorar el cálculo mental y el sentido numérico en general. Por ejemplo, realizar las operaciones con decimales sin utilizar el botón de la coma. También se pueden hacer ejercicios sin usar un número concreto o la tecla de una determinada operación como el producto (son muy útiles para comprender las operaciones inversas). Respecto a las operaciones con fracciones, los procedimientos coinciden con los del curso anterior y podemos añadir tareas ricas de mayor complejidad. Es recomendable seguir trabajando desde el modelo de la medida y del reparto igualitario (tal y como se recoge en el bloque A.3. del curso anterior) y es interesante incluir también problemas de fracciones con significado de razón. Según Gairín y Sancho (2002), con este significado, la suma encuentra su sentido en problemas del estilo: En las elecciones a delegados en un instituto, las encuestas indican para la candidatura A una relación de 3/7 entre electores que piensan votarla y los posibles votantes y para la candidatura B, una relación de 5/14. Si las dos candidaturas se coaligan y se mantiene la intención de votar, ¿qué relación entre votos favorables y votos emitidos puede esperar la candidatura conjunta? Para la resta, con este mismo enunciado, podríamos preguntar ¿cuál es la ventaja de una candidatura sobre otra? En este tipo de problemas las razones expresan relaciones entre una parte de la unidad de medida y dicha unidad. El producto de un número natural por una fracción se interpreta como un factor que aumenta la relación inicial n veces. Por otro lado, el cociente entre una fracción y un número natural n expresa una relación n veces menor. En el producto de dos fracciones podemos encontrar las siguientes situaciones: • En una receta, la relación entre azúcar y harina es 2/3 y la relación entre harina y agua son 5/7. ¿Cuál es la relación entre el azúcar y el agua? • La relación entre dos cantidades de magnitud es de 3/7. ¿Cuánto valen los 4/5 de dicha relación? En el segundo problema, la fracción 4/5 actúa como operador. Para el cociente entre dos fracciones se pueden proponer problemas de sentido inverso a los anteriores, por ejemplo: En una receta, la relación entre el azúcar y el agua son 2/3 y la relación entre el azúcar y el zumo son 5/7. ¿Cuál es la relación entre el zumo y el agua? Para continuar con la práctica de las operaciones con fracciones, se puede plantear el siguiente ejercicio: "escribir la fracción 2/3 como suma del mayor número de fracciones con numerador 1 que puedas". 2/3=1/3+1/4+1/12

	Este problema tiene una base histórica interesante y ayuda a comprender procesos a través de la historia de las matemáticas. (fuente: https://nrich.maths.org/1173?utm_source=secondary-map) Para afrontar el sentido algebraico con garantías, el alumnado debe estar familiarizado con la raíz cuadrada como operación inversa a elevar al cuadrado. Para ello, en primer curso se habrán trabajado los cuadrados perfectos y ahora tendrán que ser capaces de aplicar una raíz cuadrada en cualquier tipo de número, por ejemplo, se tienen que familiarizar con que la raíz de 9/4 es 3/2. Para ello se habrán trabajado las fracciones con modelos geométricos. Es importante usar las propiedades asociativas y conmutativas de la suma y la multiplicación y la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma para simplificar los cálculos con números enteros, fracciones y decimales (NCTM, 2000).
A.4. Relaciones: - Factores, múltiplos y divisores. Factorización en números primos para resolver problemas: estrategias y herramientas. - Comparación y ordenación de fracciones, decimales y porcentajes: situación exacta o aproximada en la recta numérica. - Selección de la representación adecuada para una misma cantidad en cada situación o problema. - Patrones y regularidades numéricas.	Las actividades descritas en primero tienen su aplicación también en segundo. Los ejercicios de divisibilidad pueden aumentar en complejidad y las técnicas de resolución potencian en gran medida el aprendizaje por indagación y el pensamiento computacional. Por ejemplo: • ¿Cuál es el resto de dividir 354972 entre 7? • Si estamos en noviembre, ¿qué mes será dentro de 1000 meses? • Si ahora es mediodía, ¿qué hora será dentro de 539 horas? • Si estamos mirando hacia el norte y giramos 945º en el sentido horario, ¿en qué dirección estaremos mirando al final? (fuente: https://nrich.maths.org/6651) Hacer la descomposición en primos en horizontal, puede evitar situaciones absurdas como descomponer el número 2, además de que agiliza los cálculos. Por ejemplo: 54=2·27=2·3·9=2·3·3·3 La notación sin potencias ayuda a la obtención de múltiplos y divisores comunes de dos o más números. Frases como "comunes y no comunes elevados al mayor exponente" en general, crean confusión y solo son eficaces en aquellos casos –no muchos- en que comprenden de verdad lo que están haciendo. Existen tareas interactivas interesantes de múltiplos y divisores más allá de los ejercicios que consisten en "adivinar" si necesitan el MCD o el mcm: https://nrich.maths.org/mobile?utm_source=secondary-map La comparación de fracciones y su ordenación puede hacerse a través del modelo de medida, del reparto igualitario y de la fracción son significado de razón. Por ejemplo, si queremos comparar 3/5 *u* y 2/7 *u* podemos argumentar que la primera fracción es mayor porque la subunidad de 1/5 es mayor que la subunidad de 1/7 y tomamos más subunidades de tamaño 1/5. Desde el reparto igualitario podemos argumentar que 3/5 es mayor que 2/7 porque tenemos más cantidad a repartir entre menos personas. Si consideramos las fracciones con significado de razón, para poder compararlas necesitamos acudir a la equivalencia entre fracciones entre otras técnicas ya comentadas. El trabajo de patrones y regularidades se debe hacer conjuntamente con el sentido algebraico y computacional, en particular con el bloque D.1.
A.5. Razonamiento proporcional: - Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas. - Porcentajes: comprensión y resolución de problemas. - Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, velocidad y tiempo, etc.).	La proporcionalidad directa relaciona dos variables que aumentan o disminuyen al mismo ritmo. Esta obviedad, a menudo es pasada por alto en las clases de matemáticas. En muchos libros de texto, a las situaciones en las que no podemos aplicar la proporcionalidad solo les dedican algunas pequeñas cuestiones de verdadero o falso. En un mismo contexto, la relación de proporcionalidad puede darse, o no, si añadimos o quitamos condiciones al problema. Por ejemplo: Un canguro avanza 12 metros en cuatro saltos. ¿Cuántos metros avanza en 5 saltos? Para que se pueda resolver el problema aplicando proporcionalidad, será preciso dar por hecho que el canguro da todos los saltos de la misma longitud. Estos pequeños matices no deben pasar desapercibidos y se debe permitir al alumnado elaborar teorías y discutir los hechos. ¿Pesan lo mismo todas las barras de pan? ¿El precio del kilo es siempre el mismo? Todas estas cuestiones enriquecen el conocimiento que se tiene de la proporcionalidad. El método por el que se resuelve cada problema dependerá de la estrategia que el alumnado elija, ofreciéndoles un amplio abanico de posibilidades. En muchos entornos cercanos al alumnado se asocian cantidades de dos magnitudes que pueden venir expresadas de cuatro formas distintas: enunciado verbal, tabla de valores, representación gráfica y expresión simbólica (Fernández y Segovia, 2011). El razonamiento proporcional se trabaja en sentido de la medida y el sentido espacial a través del cálculo de medidas indirectas utilizando las nociones de semejanza, con la proporcionalidad entre segmentos y triángulos en posición de Tales. Además, las escalas se pueden realizar aplicando diferentes formatos. A través de fotografías o de mapas reales (utilizando Google maps, por ejemplo). También pueden relacionarse otras magnitudes como la amplitud angular y la longitud. El razonamiento proporcional también debe trabajarse con porcentajes a través de la resolución de problemas en distintas situaciones cercanas al alumnado.
A.6. Educación financiera: - Información numérica en contextos financieros sencillos: interpretación. - Métodos para la toma de decisiones de consumo responsable: relaciones calidad-precio y valor-precio en contextos cotidianos.	En el estudio de la proporcionalidad encontramos multitud de ejemplos en los que podemos relacionar resultados con la toma de decisiones. Además de los ejercicios descritos en el bloque anterior, se pueden estudiar ofertas reales de la vida cotidiana: - Ofertas del 3x2 - Segunda unidad al 70% -Descuento directo…

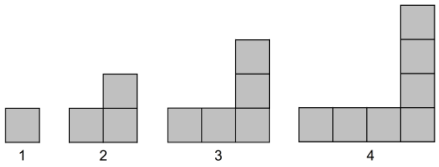
B. Sentido de la medida

En este curso de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, el alumnado debe ampliar sus experiencias de medición directa de áreas y volúmenes para profundizar su comprensión del área de figuras bidimensionales y del área y el volumen de objetos tridimensionales. Las fórmulas y procedimientos de las mediciones indirectas deben desarrollarse a través de la investigación, sin caer en el error de facilitar una larga lista de fórmulas a memorizar. Como novedad, para desarrollar la estimación en el aula de secundaria utilizaremos los problemas de Fermi. En ellos, se solicita estimar el valor numérico de alguna o varias cantidades concretas sin proporcionar información sobre la naturaleza o características del contexto, ni ligarse a estrategias concretas de resolución.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
B.1. Magnitud: - Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos: investigación y relación entre los mismos. - Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida.	Las tareas de medida directa nos permiten trabajar las distintas magnitudes observables. Asimismo, debemos dejar en manos del alumnado la selección del instrumento de medida y de las unidades en función de la precisión requerida. Se fomentará la realización de trabajos de investigación como el que se propone a continuación para buscar relaciones entre magnitudes. En este curso académico se recomienda profundizar en la magnitud volumen y relacionarla con las magnitudes de capacidad y masa. La percepción del volumen se puede ir logrando a través de actividades experimentales que ayude al alumnado a delimitarlo como un ente geométrico. Una secuencia puede ser la siguiente (Moreno, 1998, p.113): Comenzar con transformaciones de deshacer y recomponer, continuar con la equivalencia de capacidad de recipientes abiertos y volumen de cuerpos sólidos, seguir con transformaciones reales de vaciar para comparar contenidos y abordar transformaciones que conservan y no conservan el volumen. Se puede trabajar a través de la inmersión en un líquido, para ver que un volumen se mantiene invariante ante posibles deformaciones que conservan la cantidad de magnitud (paso del tiempo, orientación, temblor, etc.), por ejemplo: sumergir un trozo de plastilina y luego deformarla para repetir el experimento. Se puede preguntar por la conservación de otras magnitudes como la masa, la superficie, etc. Asimismo, se pueden realizar actividades que den soporte al trabajo científico como hinchar un globo y calentarlo, observar las juntas de dilatación en construcciones, etc.
B.2. Medición: - Longitudes de forma indirecta mediante el teorema de Thales y de Pitágoras, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación de fórmulas. - Representaciones planas de objetos tridimensionales en la visualización y resolución de problemas de áreas. - Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas.	En este curso académico se sigue la línea del curso anterior. Las actividades de este bloque se desarrollarán a través de situaciones de comparación (directa e indirecta), ordenación, medida (tanto de cálculo como de construcción) y estimación (desarrollada en el bloque anterior). La experimentación sigue siendo fundamental para trabajar las nociones del sentido de la medida. Para trabajar el área de figuras tridimensionales debemos distinguir entre las superficies desarrollables y no desarrollables, como es el caso de la esfera (Moreno, 1998). Un experimento para trabajar el área de una esfera y dar significado a la fórmula que permite calcular el área de la misma a partir de la medida de su radio, la encontramos en Calvo, Deulofeu, Jareño y Morera (2016). Tomamos una naranja con forma lo más esférica posible, pedimos al alumnado que realicen circunferencias cuyo radio sea el de la naranja y que rellenen las superficies con la piel de la naranja. Podemos trabajar la estimación antes de poner en práctica el experimento, ¿cuántos círculos serán necesarios? Pedimos que rellenen los círculos haciendo un collage con la piel de la naranja. Observarán que se rellenan 4 círculos, a partir de ese momento podemos relacionar el área de la esfera de radio *r*, con la del círculo que tiene ese mismo radio. La resolución de problemas donde se debe calcular el área de un objeto geométrico tridimensional desarrollable se debe realizar a partir de los desarrollos planos. Utilizaremos la proporcionalidad para la deducción de la fórmula que permite calcular el área lateral de un cono. Es interesante trabajar actividades de embalaje que pongan de manifiesto la relación entre el área y el volumen, tal y como se había realizado en el curso anterior con el perímetro y el área. La primera aproximación a las fórmulas de objetos geométricos tridimensionales debe ser a través del prisma donde se distinguen tres dimensiones: largo, ancho y alto. Tal y como recogen Calvo et. al. (2016), antes de presentar la fórmula que relaciona el volumen de un prisma con el de una pirámide que tiene la misma base y altura, se pueden utilizar materiales manipulativos que permitan o bien llenarlos de líquido para después compararlos, o sumergirlos en un líquido. A través de la experimentación, el alumnado podrá comprobar que tienen que volcar el contenido de la pirámide en el prisma exactamente 3 veces. Si utilizamos el líquido, podremos observar que necesitamos 3 pirámides para desplazar el mismo volumen que desplaza el prisma. Asimismo, se puede relacionar el volumen del cono y el cilindro y el volumen de la esfera con un cono cuya base tenga $2r$ de radio y la altura sea r. Así, en este curso se profundizará en el concepto de volumen y su medida a través de la experimentación que dé lugar a la deducción de fórmulas para el cálculo de medidas presentes en objetos tridimensionales conocidos.

	Asimismo, se trabajará el cálculo de medidas indirectas de longitudes a través de los teoremas de Pitágoras y Thales. El trabajo de la semejanza dentro del sentido espacial está vinculado con el sentido de la medida en este curso a través del cálculo de áreas y la construcción de figuras semejantes.
B.3. Estimación y relaciones: - Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones. - Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida.	La importancia de trabajar la estimación reside en la utilidad práctica que tiene en multitud de fenómenos y situaciones cotidianas. Por tanto, es importante saber estimar y valorar las estimaciones realizadas por otras personas (Gairín y Sancho, 2002). Sin embargo, estimar una medida con cierto grado de exactitud requiere la comprensión de los conocimientos matemáticos presentes en la medida de una cantidad de magnitud. Entendemos la estimación de una medida como un proceso de medida sin uso de herramientas y sin un referente físico, pero con el conocimiento de los principios de medida (Joram, 2003; Joram et al., 2005; Pizarro, 2015). Así, para poder plantear tareas de estimación, es necesario haber realizado actividades prácticas de medida que permitan al alumnado tener ese referente interno. El trabajo de la estimación y las situaciones que se plantean deben estar ligadas a las magnitudes trabajadas en el aula. Conviene distinguir entre estimación de magnitudes discretas y continuas y considerar si la cantidad de magnitud a estimar admite una organización espacial gráfica o manipulativa (como es el caso de la longitud, superficie o amplitud angular) o no (como es el caso del tiempo o la masa) (Segovia y de Castro, 2013). Además de considerar diferentes magnitudes, un buen diseño didáctico debe tener en cuenta las posibles situaciones que surgen. En Bright (1976) encontramos 8 situaciones de estimación distintas que están divididas en dos categorías principales: realizar una estimación y nombrar qué objeto tiene una determinada medida. Estas 8 situaciones han aparecido recogidas en las orientaciones para la enseñanza del primer curso de la etapa y, por economía de espacio, no las ilustramos en este curso. Este tipo de actividades se pueden complementar con los problemas de Fermi. Albarracín (2017) en su trabajo recoge problemas de estimación de grandes cantidades. El uso de grandes cantidades dificulta los recuentos exhaustivos o las mediciones directas, con lo que el alumnado necesita desarrollar estrategias alternativas para justificar sus estimaciones. Estos autores sugieren que para diseñar las actividades es recomendable utilizar problemas contextualizados en el propio centro educativo, considerando que la familiaridad con el contexto debería promover que los problemas sean más interesantes y accesibles, así como permitir que se pudieran efectuar las mediciones oportunas en un lugar accesible. En el artículo citado, se ejemplifican situaciones de estimación de la cantidad de personas que se pueden disponer en una cierta superficie. P. ej.: ¿Cuánta gente cabe en el patio? y de estimación de la cantidad de objetos que se pueden disponer en una cierta superficie o volumen. P. ej.: ¿Cuántos folios hay en un montón como el que está en la mesa del maestro? ¿Cuántos libros hay en estas estanterías? El trabajo de la estimación está estrechamente ligado con el error cometido y debe concretarse cuándo éste es aceptable. En Chamorro y Belmonte (1988) encontramos que la estimación es aceptable si el error absoluto no supera el 0,1, es decir, el 10 por ciento de la medida del objeto, aunque el grado de error admisible depende de la edad del alumnado y la precisión en los resultados va evolucionando a lo largo de los años (Segovia y Castro, 2009).
C. Sentido espacial	
Los elementos geométricos sujetos a estudio en segundo de ESO incluyen ya elementos de la geometría espacial, se analizarán sus propiedades y representaciones, así como las relaciones que existen entre ellos sobre todo en lo referente a formas geométricas espaciales y visualización, modelización y razonamiento. Para comprenderlos mejor, el uso de materiales manipulativos y herramientas informáticas como los programas de geometría dinámica son determinantes.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
C.1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones: - Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características. - Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales.: identificación y aplicación. - Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…)	El material plástico tipo polydron (https://www.polydron.co.uk/) permite construir fácilmente poliedros. Es interesante y necesario reflexionar sobre las relaciones entre las figuras planas y las tridimensionales. Se puede plantear un proceso que empiece en el teselado del plano con cuadriláteros para pasar al teselado con polígonos regulares y, a partir de ahí pasar a construir figuras geométricas en tres dimensiones, por ejemplo, los sólidos platónicos. Otro material que permite algunos de los usos del polydron es el material Plot: este es un material estructurado que consiste en una serie de polígonos con pestañas que permiten unirlos mediante el uso de gomitas para formar cuerpos geométricos. Se pueden descargar gratuitamente de https://reseteomatematico.com/descargas-materiales-manipulativos-matematicas / Es de interés el estudio de las secciones que aparecen en un cubo al cortarlo por un plano. Este trabajo se puede hacer de forma física si se dispone de cubos de porexpan y sierras, por ejemplo, o se puede hacer de forma virtual acudiendo a animaciones realizadas con GeoGebra (ver las secciones del cubo de M. Sada enhttps://www.GeoGebra.org/m/t5QdSD4F). En el capítulo 4 de Guillén (1991) se puede leer con más detalle el trabajo que se propone. El trabajo con el Teorema de Pitágoras no debe reducirse a su interpretación aritmética y geométrica (en el sentido de la medida se comenta la relación entre las medidas de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo), siendo conveniente un trabajo más completo para su comprensión en profundidad. Por ejemplo, Troyano y Flores (2016) muestran cómo el alumnado en la mayoría de las ocasiones tiene una comprensión parcial del Teorema que se limita a la fórmula y a su aplicación, pero no incluye la doble implicación del teorema de Pitágoras entre tipo de triángulo y relación métrica. En este sentido, se debe procurar dar un contexto a la interpretación geométrica, viendo que en los casos de triángulos obtusángulos o acutángulos también aparece un “teorema de

	Pitágoras" con desigualdades de este modo podemos transmitir que los resultados matemáticos surgen de la exploración sistemática de situaciones más que de la "casualidad". El Teorema de Pitágoras extendido o generalizado tiene la utilidad de conectar con la semejanza de un modo natural, se puede consultar Barreto (2010) para ver numerosas aplicaciones del mismo, también en GeoGebratube podemos encontrar escenas para que el alumnado explore este resultado ver, por ejemplo, https://www.GeoGebra.org/m/Dm78MG44 de M. Moreno, usuaria de filiación desconocida. Este Teorema es muy rico y puede aprovecharse también para trabajar una idea intuitiva de demostración, es particularmente interesante la demostración de Bhaskara (https://www.GeoGebra.org/m/pZFwdepU) esta animación fue elaborada por M. Arce y en ella explica cómo construir las piezas del puzle que demuestra el Teorema y que se puede utilizar simultáneamente en papel imprimiendo las piezas; también la demostración de Perigal tiene interés (https://www.GeoGebra.org/m/gjNwybbx) esta animación fue elaborada por M. Sada y en ella no hay tanta información sobre la construcción de las piezas del puzle pero es fácilmente deducible del dibujo y puede ser también un trabajo interesante. Se propone introducir la semejanza a través de tareas manipulativas como hacer una figura "más grande" a través de la instrucción los segmentos que miden 4 cm. pasan a medir 7 cm. A partir de esta actividad se proponen actividades que hagan reflexionar sobre las relaciones entre las áreas de las dos figuras y volúmenes, construyendo un paralelepípedo "más grande" a partir del desarrollo plano de uno y con la misma instrucción para llevar a cabo la ampliación. En este momento también es importante hablar de figuras "no semejantes", es decir figuras que tienen la misma área lateral pero diferente volumen o mismo volumen, pero diferente área lateral. Es importante el trabajo manipulativo antes de pasar a formalizar las relaciones entre áreas y volúmenes ya que, como señala Ferrer (2016) incluso alumnado de bachillerato tiene dificultades con la relación entre las áreas laterales y los volúmenes de objetos tridimensionales llegando a decir que, si el área lateral es la misma, el volumen también lo será o viceversa. El trabajo de la semejanza está vinculado también con el sentido de la medida a través del cálculo de áreas y la construcción de figuras semejantes.
C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica: - Modelización geométrica para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. - Relaciones geométricas: investigación en diversos sentidos (numérico, algebraico, analítico) y diversos campos (arte, ciencia, vida diaria…).	Como hemos comentado en el caso de Primero de ESO, el trabajo en Geometría debe organizarse en torno a las cinco fases de van Hiele, proponemos en el caso de la visualización de las relaciones entre las figuras de dos y tres dimensiones las siguientes fases: 1 Introducción: presentación del material polydron, explicación de lo que es un desarrollo plano. 2 Orientación guiada: A partir de las imágenes de los diferentes hexaminós, determinar cuáles son desarrollos planos del cubo. (ídem a partir de los diferentes hexamantes como desarrollos planos de la bipirámide). Primero se lleva a cabo la actividad sin material para luego repetirla con material. 3 Explicitación: el alumnado de cada equipo comenta en voz alta los resultados, el profesorado corrige vocabulario (elementos del poliedro y de los polígonos y movimientos) y trata de que se comparen resultados con y sin material. 4 Orientación libre: El alumnado, por parejas, construye con triángulos y cuadrados un poliedro libre y presenta a su pareja un supuesto desarrollo plano, la actividad es tratar de decidir si lo es o no sin tocarlo. 5 Integración: elaboración de una lista de reglas que permitan descartar algunos de los hexaminós como desarrollos planos del cubo. La introducción de los lugares geométricos rectos (mediatriz y bisectriz) se debe hacer atendiendo precisamente a su carácter de lugares geométricos de puntos que cumplen una determinada condición. En este sentido, y mediante un aprendizaje a través de la resolución de problemas, podemos elaborar una secuencia que muestre cómo, al dibujar punto a punto los puntos a la misma distancia de dos dados aparece una recta (ídem a la misma distancia de dos lados de un ángulo). Esta introducción se puede hacer en un contexto que le dé sentido y lo trabaje a través de la resolución de un problema significativo. Por ejemplo partiendo de buscar manualmente en GeoGebra los puntos a la misma distancia de dos amigos que quieren quedar se puede llegar a la noción de mediatriz y, cuando incluimos un tercer amigo, a la de circuncentro (Arnal y Planas, 2013, archivos GeoGebra: https://www.GeoGebra.org/m/X7Mdv0Is, secuencia: https://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/3666/00220111000110.pdf?sequence=1&isAllowed=y) o de puntos a la misma distancia de varias carreteras para ubicar una gasolinera para hacer aparecer la noción de bisectriz o de circuncentro. Tenemos aquí una buena oportunidad para la conexión con otras áreas, es frecuente que en Plástica se construya la mediatriz o la bisectriz sin partir de que son lugares geométricos sino a través de sus propiedades gráficas.
D. Sentido algebraico y pensamiento computacional	
Es conveniente continuar con un aprendizaje significativo del álgebra, en el que el alumnado se irá familiarizando poco a poco con las mecánicas de cálculo algebraico desde un punto de vista de resolución de problemas, la generalización de patrones y las situaciones funcionales. Durante este curso el alumnado debe consolidar las ideas del curso anterior, manipular expresiones algebraicas más complejas y profundizar en temas como la resolución de ecuaciones o la relación entre la expresión simbólica de una función y su gráfica. El estudio de patrones, la resolución de problemas y la modelización de situaciones pueden ser elementos clave en el desarrollo de estos aspectos. Lejos de tratar el lenguaje algebraico separado del resto de sentidos, se pueden resaltar las conexiones con saberes del resto de sentidos, particularmente el numérico y el espacial.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
D.1. Patrones: -Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la	La descripción de patrones, tanto numéricos como geométricos, proporciona situaciones de aprendizaje en las que de forma natural se aprecia la potencia del lenguaje algebraico para describir de forma precisa y simple una ley general. A continuación, describimos un ejemplo de investigación

regla de formación en casos sencillos.	de un patrón sugerido en Calvo et al. (2016, p.122): Se presenta al alumnado el siguiente patrón, bien en un dibujo o con el apoyo de material manipulativo (usando policubos, por ejemplo):  A continuación, se plantean las siguientes preguntas: ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar la siguiente figura? ¿Y la figura 6? ¿Y la 10? ¿Y la 215? ¿Puedes encontrar una fórmula general para saber cuántos cuadrados formarán una figura sabiendo el número de orden? Como vemos se propone que las preguntas se planteen de forma gradual. Es decir, antes de pedir una fórmula general podemos preguntar cómo se forman las figuras inmediatamente posteriores para que el alumnado pueda estudiar la pauta de formación de las figuras (por ejemplo, que se añaden dos cuadrados para pasar de una figura a la siguiente). Poco a poco se puede ampliar el salto entre las figuras, haciendo que sea incómodo dar la respuesta mediante la ampliación de la tabla. Después de esta exploración se pedirá al alumnado que proponga alguna fórmula para el cálculo del número de cuadrados. Lo más habitual es que se propongan distintas fórmulas, y resulta de interés que el alumnado explique la procedencia de sus propuestas: (n – 1) + (n – 1) + 1, n + (n – 1), n + n – 1, etc. A partir de aquí se puede pasar al cálculo algebraico para comprobar su equivalencia y escoger, entre todas las formulaciones, la que se vea más sencilla para realizar los cálculos de forma eficiente. En Calvo et al. (2016) se sugiere también ampliar la actividad preguntando qué número de orden corresponde a la figura formada por 233 cuadrados o por 116 (y que el alumnado ofrezca distintos tipos de justificaciones para argumentar que 116 no es solución en ningún caso). Se puede extender la actividad pidiendo al alumnado que represente la información de la tabla en una gráfica, poniendo de manifiesto la relación de dependencia lineal entre el número que representa la posición y el número de cuadrados. El trabajo con otros patrones con el mismo salto y otros de salto constante nos puede llevar, por ejemplo, a la idea de pendiente. Se pueden trabajar también patrones más complejos en los que el crecimiento no sea lineal. Claramente un trabajo frecuente con este tipo de tablas nos va a permitir formar conexiones con el estudio de funciones. En la web https://www.visualpatterns.org/ se pueden encontrar cientos de patrones. Es conveniente también que el alumnado trabaje con relaciones numéricas y patrones en los que intervienen más de una variable, como por ejemplo la relación de Euler entre caras, aristas y vértices para los poliedros convexos.
D.2. Modelo matemático: - Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico. - Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.	Como ya se ha mencionado, es conveniente trabajar usando distintos tipos de representaciones, como gráficas, tablas y ecuaciones a la hora de trabajar la modelización de situaciones y problemas. El estudio de modelos lineales y afines puede extenderse con respecto al del curso anterior incluyendo el uso de expresiones algebraicas para describirlos. El modelo cuadrático puede comenzar a explorarse con más profundidad que en el curso anterior. Esto puede hacerse por ejemplo a partir del clásico problema de determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima fijado el perímetro, o del problema inverso, determinar el rectángulo de perímetro mínimo fijada el área. El estudio de la representación gráfica de la función cuadrática correspondiente permitirá confirmar la hipótesis de que las dimensiones óptimas corresponden a un cuadrado. El trabajo con este tipo de modelos se puede desarrollar conjuntamente con el trabajo de los apartados A.5. Razonamiento proporcional del sentido numérico y el apartado B.2. Medición del sentido de la medida (en el que aparecen las áreas de figuras planas). Sin necesidad de utilizar un lenguaje algebraico que el alumnado no ha asimilado todavía, el alumnado también puede comenzar a caracterizar algunos modelos elementales de crecimiento: lineal, cuadrático y exponencial. Esto puede hacerse trabajando con tablas y gráficas, pudiendo usarse como ejemplos preliminares los obtenidos en el estudio de patrones geométricos. Deberíamos también atender al estudio cualitativo de las funciones. Entre las varias posibles situaciones contextualizadas que podemos utilizar se encuentran por ejemplo los problemas de movimiento. El trabajo con gráficas de distancia-tiempo permite comenzar un estudio cualitativo de la idea de pendiente como tasa de cambio (velocidad), a la vez que nos sirve para explorar de nuevo los modelos lineales, y potenciar conexiones con la materia de Física y Química. El uso del lenguaje algebraico en la modelización de situaciones pasa por el estudio de la relación entre álgebra y gráficas, que se comenta con más detalle en el apartado D.5.
D.3. Variable:	El uso de tablas y representaciones gráficas en el estudio y modelización de situaciones en distintos

N.º Serie	N.º de cuadrados	
1	1	
2	3	+2
3	5	+2
4	7	+2
5	9	
6	11	
...	...	
10	19	
...	...	
215	429	
...	...	
n	2n – 1	

<table>
<tr><td>- Variable: comprensión del concepto en sus diferentes naturalezas.</td><td>contextos va a contribuir al desarrollo de una comprensión inicial de los diferentes usos de las variables. Por ejemplo, en las situaciones descritas anteriormente el alumnado puede comenzar a utilizar gráficos y tablas para analizar la naturaleza de los cambios en las cantidades en relaciones lineales, cuadráticas y exponenciales.</td></tr>
<tr><td>D.4. Igualdad y desigualdad:
- Relaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.
- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas basados en relaciones lineales y cuadráticas.
- Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones y sistemas lineales y ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana.
- Ecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología.</td><td>Durante este curso se puede consolidar el trabajo con expresiones y ecuaciones lineales iniciado en el curso anterior. Es conveniente que el alumnado no trabaje estos aspectos de forma aislada, sino en situaciones donde se aprecie que el lenguaje algebraico sirve para justificar y argumentar, y simplificar o resolver un problema. Estos contextos se pueden encontrar por ejemplo en el estudio de patrones, la resolución de problemas o rompecabezas numéricos y los problemas geométricos sencillos.
En este curso puede introducirse la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. La idea básica que debe desarrollar el alumnado es la importancia de manipular las ecuaciones para conseguir que tengan solo una incógnita y a partir de ahí completar la resolución del sistema. No es necesario introducir métodos de resolución muy estructurados en este nivel. Por otra parte, no debe descuidarse la resolución gráfica de los sistemas, tanto a mano como con herramientas tecnológicas. Esta resolución gráfica permite dar una interpretación a la solución del sistema, a la vez que se consolida la relación entre la expresión algebraica y la gráfica.
El trabajo con expresiones de segundo grado y las identidades notables, que se comienza en este curso, debe abordarse con atención, intentando propiciar situaciones de práctica que permitan su aplicación en el terreno de la argumentación y la resolución de problemas. El producto de binomios puede introducirse a partir de un modelo geométrico (con áreas) o un modelo aritmético (multiplicación en caja).
Un ejemplo de contexto en el que introducir la identidad notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ puede ser un contexto numérico de cálculo de cuadrados: el estudio del resultado de calcular el cuadrado de números del tipo 10n +1 (21, 51, etc.), de números cuya última cifra es 5, etc. En https://donsteward.blogspot.com/search/label/a%20add%20b%20squared se pueden encontrar varios ejemplos, acompañados por representaciones pictóricas.
Con respecto a la resolución de ecuaciones de 2º grado, las ecuaciones incompletas sin término lineal pueden comenzar a resolverse tan pronto como el alumnado esté familiarizado con la raíz cuadrada. Extendiendo los métodos de resolución de ecuaciones lineales se pueden resolver ecuaciones del tipo $x^2 + 6 = 31$, $(x – 4)^2 = 81$ y $3x^2 – 8 = 40$.
Antes de introducir procedimientos más formales para la resolución de ecuaciones de segundo grado puede plantearse la resolución por tanteo, con la ayuda de la calculadora o una hoja de cálculo. Por ejemplo, para $x^2 – x – 1 = 0$ se observa fácilmente que la ecuación tiene una solución entre 1,61 y 1,62:
<table><tr><th>x</th><th>$x^2 – x$</th></tr><tr><td>1,6</td><td>0,9600</td></tr><tr><td>1,65</td><td>1,0725</td></tr><tr><td>1,61</td><td>0,9821</td></tr><tr><td>1,62</td><td>1,0044</td></tr></table>
Con este tipo de trabajo el alumnado percibe la solución como un número que satisface la ecuación. Además, nos permite introducir, por una parte, un método de resolución que en principio es válido para cualquier tipo de ecuación, y por otra parte da lugar a la necesidad de otros métodos de resolución y estudio de las ecuaciones: por tanteo es difícil establecer si hay más de una solución y también resulta complicado obtener soluciones exactas.
A la hora de formalizar la resolución de las ecuaciones de segundo grado, podemos distinguir aquellas que pueden resolverse por factorización y las que no. La resolución de ecuaciones que factorizan como producto de binomios sencillos puede enlazarse con el trabajo con binomios y con la representación gráfica de la parábola correspondiente.
En el caso de ecuaciones que no factorizan, el método de resolución de completar cuadrados puede ser una opción en ecuaciones sencillas. Este método puede introducirse con un modelo geométrico, el mismo utilizado por Al-Juarismi y los matemáticos árabes de la época.
A partir del método de completar cuadrados puede deducirse la conocida fórmula de resolución de las ecuaciones de 2º grado. No es necesario a este nivel realizar una demostración formal de la fórmula, pero puede ilustrarse para algún caso más simple. Observamos que el método de completar cuadrados puede resultar útil también para la representación de parábolas, puesto que permite identificar con facilidad el vértice.
Una vez se introduce la fórmula, el alumnado tiende a utilizarla sin atender a las características de la ecuación, que tal vez pueda resolverse por métodos menos complejos. Es por tanto importante que el alumnado se sienta cómodo con otros métodos de resolución, para que puedan identificar ecuaciones sencillas que no requieren el uso de la fórmula.</td></tr>
<tr><td>D.5. Relaciones y funciones:</td><td>El estudio de las funciones está ligado al estudio de los modelos fundamentales. En este curso</td></tr>
</table>

- Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan. -Relaciones lineales y cuadráticas: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas. - Estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.	podemos consolidar el trabajo en funciones lineales y afines, y comenzar el estudio de las funciones cuadráticas. Durante el primer curso el alumnado ha trabajado con las conexiones entre ecuación, tabla de valores y gráfica para funciones lineales y afines. El siguiente paso, va a ser relacionar directamente la gráfica y la ecuación, $y = mx + n$, a partir de la pendiente y la ordenada en el origen. A la hora de explorar la relación entre la gráfica y los parámetros m y n no debemos olvidar el uso de herramientas tecnológicas, ya que permiten visualizar de forma directa como la manipulación de los parámetros afecta a la gráfica. En todo este trabajo es conveniente asegurarse que la idea de pendiente se interprete correctamente en los diferentes lenguajes de representación de una función (tabla, gráfico y ecuación). Tampoco debe olvidarse que el concepto de pendiente ya ha sido utilizado por el alumnado como la constante de proporcionalidad en la resolución de problemas aritméticos y geométricos. Al mostrar la relación entre situaciones anteriores y nuevos conceptos se favorece una mejora de la comprensión de lo nuevo, a la vez que se añade una nueva dimensión a lo anterior. El gráfico de $y = x^2$ se puede introducir estudiando los valores del área de un cuadrado a partir de su lado, para después pasar a la idea numérica de que a cada número le hacemos corresponder su cuadrado. Tras esta primera aproximación, es conveniente estudiar las gráficas de funciones cuadráticas en paralelo a las expresiones y ecuaciones de segundo grado. La relación entre la factorización de una expresión cuadrática, la solución de la ecuación correspondiente y los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas es relativamente sencilla y puede establecerse desde un principio. Nuevamente las herramientas tecnológicas pueden ser de ayuda para explorar la representación gráfica. En una primera instancia, la resolución gráfica de una ecuación de segundo grado, efectuada por ejemplo con la ayuda de una calculadora gráfica, permite al alumnado identificar rápidamente el número de soluciones de una ecuación, así como obtener una aproximación numérica de las mismas, a la vez que se familiariza con las parábolas. Posteriormente pueden trabajarse algunas características básicas de estas curvas, como su simetría, o el efecto de transformaciones sencillas: cómo varía la gráfica de $y = ax^2$ según modificamos el parámetro a, la relación entre el término constante y la ordenada en el origen (estudiando la ecuación $y = ax^2 + n$), etc.
D.6. Pensamiento computacional: - Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas a otras situaciones. - Estrategias útiles en la interpretación y modificación de algoritmos. - Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.	El pensamiento computacional se trabaja de forma más o menos directa en todos los saberes. En las orientaciones del resto de sentidos encontramos situaciones en las que se trabajan estrategias asociadas a la interpretación y modificación de algoritmos, generalización y resolución de problemas. Por ejemplo: el trabajo propuesto para cuestiones de divisibilidad en el sentido numérico, la resolución de problemas de estimación en el sentido de la medida, la resolución de problemas sobre lugares geométricos en el sentido espacial o el análisis de algunos juegos sencillos en el sentido estocástico. Con respecto al sentido algebraico, ya se ha comentado que su desarrollo implica trabajar el pensamiento computacional. Esto es así puesto que las habilidades del pensamiento computacional incluyen el reconocimiento de patrones, el diseño y uso de abstracciones, la descomposición de patrones o la determinación de qué herramientas son adecuadas para analizar o solucionar un problema. La propuesta de situaciones que pueden ser analizadas mediante programas u otras herramientas tecnológicas se plantea también en las orientaciones del resto de sentidos. Dentro del sentido algebraico, como se comenta en el apartado anterior el estudio de la representación gráfica de una función se ve enriquecido con el trabajo con software gráfico. También la exploración de modelos funcionales (como los modelos de crecimiento) puede profundizarse y extenderse con el uso de herramientas tecnológicas, tanto hojas de cálculo como calculadoras gráficas.

E. Sentido estocástico

Los elementos del sentido estocástico sujetos a estudio en segundo de ESO incluyen la introducción de las medidas de dispersión y la profundización en el trabajo con proyectos, así como la elaboración de conjeturas que se deben comprobar vía la realización de experimentos sencillos o mediante el uso de programas informáticos.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
E.1. Organización y análisis de datos: - Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucran una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales. - Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales. - Gráficos estadísticos: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...) y elección del más adecuado.	Se propone que en este curso se incorpore la introducción del trabajo con las medidas de dispersión: varianza, desviación típica y rango, fundamentalmente. Será interesante la construcción de datos que muestren la poca representatividad del rango cuando este se aplica a toda la muestra sin tener en cuenta datos atípicos. Si bien la variación entre los datos es una de las razones de ser de la estadística, la medida e interpretación de la misma es uno de los problemas más difíciles en la enseñanza. Sánchez y Orta (2015) alertan sobre que no es suficiente realizar tareas de recogida de datos o trabajar con datos descontextualizados para que surjan las ideas abstractas relacionadas con la variabilidad de los datos. Encontrar un equilibrio entre estos extremos depende en gran medida de la elección de buenos problemas. En este sentido, las guías Praxis (Borrell et al., 1999) ofrecen un conjunto de actividades de interés para la comparación de la utilidad entre los diferentes parámetros para responder a la tarea de elegir a la jugadora de baloncesto más adecuada para realizar el último tiro de un partido dada la coincidencia de medias entre todas ellas al medir el porcentaje de aciertos al encestar. Se deben proponer tareas en las que el cálculo manual de los parámetros de dispersión no sea el centro de la tarea ya que es laborioso y reduce el tiempo y las posibilidades de reflexionar sobre la utilidad de cada parámetro. En este sentido Sánchez y Orta (2015) proponen dos problemas para la discusión de las preferencias sobre dos juegos o varios tratamientos de una enfermedad que sirven

- Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales. - Variabilidad: interpretación y cálculo, con apoyo tecnológico, de medidas de dispersión en situaciones reales. - Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.	para explorar diferentes medidas de la variabilidad y su relación con el riesgo a tomar en cada decisión. En lo relativo al trabajo con gráficos, lo comentado para primero de ESO puede ser igualmente válido en este curso, si bien el aprovechamiento de cada uno puede ser mayor.
E.3. Inferencia: - Formulación de preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población. - Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales. - Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.	Resulta adecuado, como hemos señalado para primero de ESO, el trabajo con proyectos estadísticos alrededor de temas de interés del alumnado. Lógicamente, la profundidad del estudio se irá incrementando con el paso de los cursos al incorporar nuevas herramientas estadísticas. Batanero y Díaz (2011) proponen varios proyectos que pueden ser llevados al aula directamente o previa adaptación a las circunstancias y niveles del alumnado de que se trate, por ejemplo, los proyectos "Comprueba tus intuiciones respecto del azar" o "¿Cómo son tus compañeros y compañeras de clase?" serían apropiados para este curso.
E.2. Incertidumbre: - Fenómenos deterministas y aleatorios: identificación. - Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada. - La probabilidad como medida asociada a la incertidumbre de experimentos aleatorios. - Asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace.	La experimentación que hacía surgir la interpretación frecuencial se complementa con la simulación por ordenador de determinados experimentos. En este curso se propone la elaboración de conjeturas que se deben comprobar vía la realización de experimentos sencillos o mediante el uso de programas informáticos o applets ya diseñadas para ello. Autores de applets de GeoGebra como M. Sada comparten en el repositorio del programa numerosas simulaciones, ver https://www.GeoGebra.org/m/qjWuUAgs. Son interesantes juegos como Beano (http://walkinginmathland.weebly.com/teaching-math-blog/beano-probability-with-beans) al que se puede jugar con dados comunes o con dados irregulares como los que se propone crear en primero de ESO ya que basan su funcionamiento en la elaboración de conjeturas sobre probabilidad que se contrastan con la experimentación-juego. La realización de experimentos compuestos por dos experimentos simples facilita la creación por parte del alumnado de tablas de doble entrada o de diagramas de árbol donde colocar los resultados que van apareciendo. En el contexto de partidas de ajedrez, o de otros juegos por parejas, es fácil justificar el uso del diagrama de árbol donde aparecen los posibles movimientos de un jugador y las posibles respuestas del otro, además este juego exige ser exhaustivo en el análisis de las consecuencias de un movimiento. Para que no resulten árboles muy grandes se propone utilizar tableros con pocas piezas, con posiciones cercanas al final del juego. En este sentido el trabajo con problemas como ¿qué equipo ganará? (https://nrich.maths.org/9546) pueden resultar de gran interés por la posibilidad de trabajar primero experimentalmente, después simulando con el ordenador la solución y finalizar con el diagrama de árbol para comenzar una cierta formalización del trabajo.

F. Sentido socioafectivo

El sentido socioafectivo está muy relacionado con la Competencia Personal, Social, y de Aprender a Aprender (CPSAA). El desarrollo de esta competencia implica, por una parte, plantear situaciones en las que el alumnado tenga la oportunidad de reflexionar sobre sí mismo, sus actitudes y sobre cómo se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, se debe atender también al desarrollo de las destrezas sociales, el trabajo en equipo y la creación de relaciones saludables. Dentro de las matemáticas la resolución de problemas es un elemento central, en el que de forma natural el alumnado se va a encontrar situaciones en las que deba enfrentarse a un reto, hacer frente a la incertidumbre, gestionar su estado emocional ante las dificultades y desarrollar actitudes de perseverancia y resiliencia. Para propiciar el trabajo efectivo en estos aspectos es necesario establecer un clima en el aula en el que se favorezcan el diálogo y la reflexión, se fomente la colaboración y el trabajo en equipo, y se valoren los errores y experiencias propias y de los demás como fuente de aprendizaje.

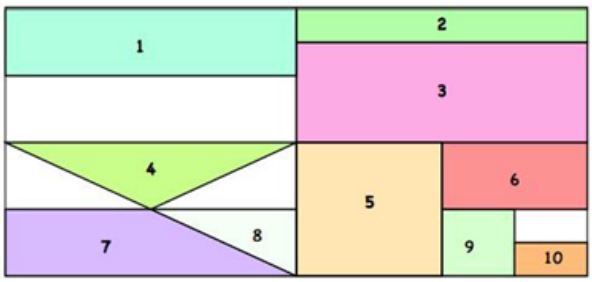
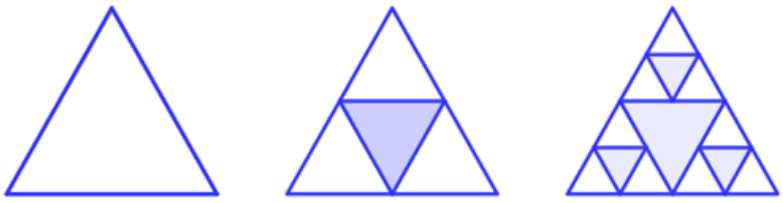
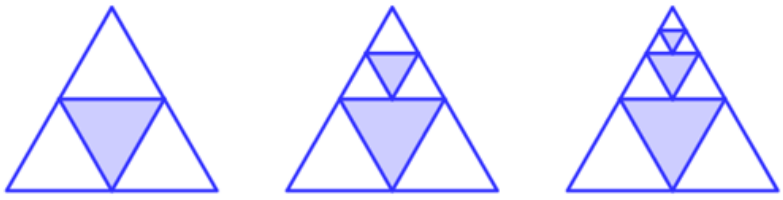
Otro elemento integral del sentido socioafectivo en las matemáticas es promover la erradicación de ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato. Con este objetivo se propone, por ejemplo, el uso de actividades que den lugar a un aprendizaje inclusivo (por ejemplo, tareas ricas o actividades de "suelo bajo y techo alto"). Por otra parte, hay que incluir oportunidades para que el alumnado conozca las contribuciones de las mujeres, así como de distintas culturas y minorías, a las matemáticas, a lo largo de la historia y en la actualidad.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
F.1. Creencias, actitudes y emociones: - Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.	La resolución de un problema significa comprometerse con la solución de una tarea para la que no se conoce previamente el método de solución. Al abordar los problemas, el alumnado tiene que razonar matemáticamente, emplear sus conocimientosmatemáticos y en ocasiones, adquirir nociones matemáticas nuevas. La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas lleva aparejado el desarrollo de actitudes básicas para el trabajo matemático:

- Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas. - Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.	perseverancia, flexibilidad, estrategias personales de autocorrección y de superación de bloqueos, confianza en las propias posibilidades, iniciativa personal, curiosidad y disposición positiva a la reflexión sobre las decisiones tomadas y a la crítica razonada, planteamiento de preguntas y búsqueda de la mejor respuesta, aplicando lo aprendido en otras situaciones y en distintos contextos, interés por la participación activa y responsable en el trabajo en pequeño y gran grupo. Para ello, no se trata, por tanto, de que el alumnado reciba instrucción directa sobre educación emocional, ni sobre los componentes de la dimensión afectiva en matemáticas (valores, creencias, actitudes y emociones) y sus diferencias, sino que en la práctica diaria de clase diseñada por el profesorado ponga en juego distintas estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo como favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas; revisar los pasos seguidos en la resolución de una tarea para plantearse si hay errores o si lo obtenido puede emplearse en otras situaciones; revisar las distintas resoluciones obtenidas, enfatizando en que no hay una única manera de resolver un problema; identificar en las tareas cuáles son los aspectos clave para su resolución y prever qué tipo de andamiaje ofrecer al alumnado en caso de bloqueo, etc.
F.2. Trabajo en equipo, toma de decisiones, inclusión, respeto y diversidad: - Técnicas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático. - Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos. - Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad. - La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde una perspectiva de género y multicultural.	El trabajo en pequeños grupos heterogéneos, de tres o cuatro estudiantes, a ser posible conformados de manera aleatoria, hace que el alumno o la alumna no se tenga que afrontar solo al problema que se plantea y se sienta más seguro al expresar sus ideas en condiciones de igualdad. No se trata de trabajar de forma cooperativa para elaborar un producto final que hay de entregar, ni de llevar a cabo roles específicos. Es cuestión de interactuar, de conversar entre iguales para discutir formas de abordar un problema, llegar a acuerdos. Cuando la cultura de aula incorpora de forma natural y cotidiana estas interacciones, las estrategias personales que pueda tener cada alumno y cada alumna de forma espontánea se ven ampliadas y enriquecidas, al mismo tiempo que obliga a utilizar un lenguaje matemático (en sentido amplio, atendiendo a sus diversos registros, desde el lenguaje oral hasta el simbólico-numérico, pasando por diagramas y esquemas) que comprendan los compañeros y las compañeras. En definitiva, hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. El profesorado debe asumir un papel fundamentalmente de guía que plantea preguntas abiertas al alumnado, preguntas ricas, que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás y a buscar recursos en el aula que necesiten para resolver el problema. También es vital dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. No es suficiente con lanzar la pregunta y acto seguido, a los pocos segundos, desvelar la respuesta. Otro aspecto a tener en cuenta por el profesorado es ser consciente del entorno individual y social del alumnado y usar ese conocimiento para conectar e integrar los contenidos a enseñar y los contextos de las tareas con los intereses reales del alumnado. Las matemáticas son una actividad característica de la especie humana, al igual que la literatura, el arte, la física o la música. Las matemáticas tienen un pasado, un presente y un futuro, y es importante que el alumnado sea consciente de la naturaleza viva de las matemáticas. Las matemáticas no son algo acabado, sino que, a lo largo de la historia, con la contribución de matemáticos y matemáticas del mundo se han ido construyendo las ideas matemáticas que hoy conocemos y que se encuentran en la base de todas las ciencias. Conocer la Historia de la Matemática conlleva, por una parte, entender mejor el desarrollo y motivación de conceptos e ideas en matemáticas, que en ocasiones aparecen desconectados entre sí dentro del currículo. Por otra parte, puede contribuir a cambiar la percepción del alumnado hacia la asignatura, haciéndola más cercana y coherente. Conocer su historia implica también comprender mejor el papel de las matemáticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, y les da un contexto. Por último, una perspectiva histórica nos permite abordar cuestiones como las dificultades de acceso a las matemáticas por parte de la mujer y otras minorías a lo largo de los siglos. Se puede hacer un primer acercamiento a la historia de las matemáticas procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. En este sentido, existen publicaciones que recogen diferentes secuencias didácticas para introducir la historia de las matemáticas en el aula de secundaria, como el monográfico de Barbin et al. (2018), Moyon y Tournés (2018) o la página web Convergence (https://www.maa.org/press/periodicals/convergence). También es posible encontrar otros materiales como lecturas o audiovisuales de contenido matemático, bien de ficción (“Figuras ocultas”, “El hombre que conocía el infinito”) o no ficción (podcasts, documentales, entrevistas, etc.).

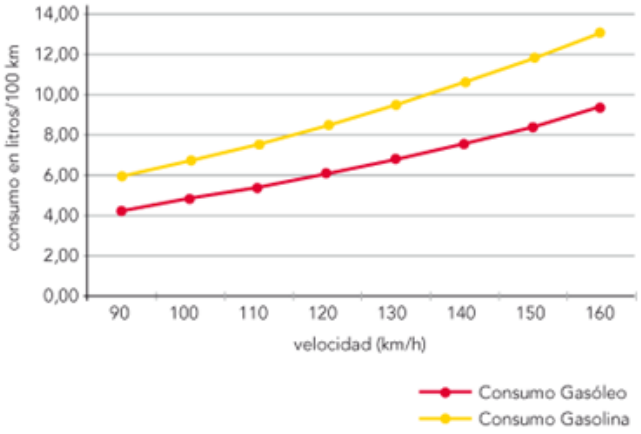
III.2.3. Matemáticas 3º de ESO

A. Sentido numérico	
El sentido numérico acompaña siempre, en los quehaceres diarios y en la vida académica. En este curso se realiza una síntesis de todo lo trabajado durante la primera etapa de la secundaria. Aparecerán nuevas tareas, pero los procedimientos son similares. Por tanto, los razonamientos se esperan más maduros y más críticos. El alumnado debe ser capaz de expresarse matemáticamente con la terminología adecuada tanto para escribir las secuencias del cálculo como para expresar sus razonamientos y conclusiones de forma verbal.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*

A.2. Cantidad: - Números grandes y pequeños: notación exponencial y científica y uso de la calculadora. - Realización de estimaciones con la precisión requerida. - Números enteros, fraccionarios, decimales y raíces en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana. - Diferentes formas de representación de números enteros, fraccionarios y decimales, incluida la recta numérica. - Porcentajes mayores que 100 y menores que 1: interpretación	En lo que se refiere al manejo de las cantidades, estimaciones y uso de los diferentes sistemas numéricos, no hay mucha variación respecto de los dos primeros cursos de la ESO. En este curso, cuando estudian los conjuntos numéricos, además de la relación de contenido entre ellos, se debe reflexionar acerca de qué acciones se relacionan con cada campo numérico (Calvo et al., 2016): contar ($\mathbb{N}$), situar ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), expresar variaciones ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$), expresar partes o razones ($\mathbb{Q}$), medir ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), ordenar ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$), codificar ($\mathbb{N}$). El contexto nos dará más información sobre si la cantidad puede ser discreta o continua, si admite valores negativos y si debemos trabajar con notación decimal en cuyo caso, será preciso decidir el orden de aproximación. Es importante ayudar al alumnado a desarrollar y utilizar estrategias para estimar los resultados de los cálculos de números racionales y juzgar su razonabilidad. Por ejemplo, si sumamos 2/3 y 3/4 y alguien nos dice que la respuesta es 5/7 podemos indicarle que como ambas fracciones son mayores que 1/2, el resultado tiene que ser un número mayor que 1. Asimismo, el cálculo mental y la estimación son útiles en muchos cálculos que involucran porcentajes. Los porcentajes son particularmente útiles cuando se comparan fracciones y también se encuentran con frecuencia en situaciones de resolución de problemas que surgen en la vida cotidiana. Al igual que con las fracciones y los decimales, las dificultades conceptuales deben abordarse cuidadosamente en la instrucción (NCTM, 2000). En particular, los porcentajes inferiores al 1 por ciento y superiores al 100 por ciento suelen ser un desafío, y es probable que la mayoría del alumnado encuentre situaciones cercanas que involucren porcentajes de estas magnitudes
A.3. Sentido de las operaciones: - Estrategias de cálculo mental con números naturales, fracciones y decimales. - Operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales en situaciones contextualizadas. - Relaciones inversas entre las operaciones (adición y sustracción; multiplicación y división; elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas. - Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo.	Siguiendo la misma línea metodológica que en cursos anteriores, deben ser capaces de realizar con soltura las operaciones aritméticas sencillas con enteros, fracciones y decimales. Por este motivo, es necesario consolidar y afianzar las técnicas trabajadas en los cursos anteriores. Se deben proponer en el aula tareas contextualizadas que den sentido a la aritmética. Pueden ser situaciones cotidianas, pero también son muy interesantes las actividades en contextos matemáticos. Por ejemplo, con esta figura, tomando como unidad el rectángulo 1. ¿Qué fracción representa el rectángulo 2? ¿El 3? ¿El 1+5? ¿Las que están coloreadas? Y todas las preguntas que se nos ocurran. Mucho más fácil es el problema si se toma como unidad el rectángulo grande. De este modo, con un mismo contexto podemos atender fácilmente a la diversidad del aula realizando tareas en las que todos aprenden.  Este curso se realiza una síntesis de muchas de las cosas que han ido aprendiendo en primero y segundo. En este sentido, se pueden plantear problemas que involucren varios conceptos al mismo tiempo. Por ejemplo, ¿En qué cifra acaba el número 7^{925}? Se combinan propiedades de las potencias, divisibilidad y la búsqueda de patrones. El uso de la tecnología permite abordar problemas reales donde los cálculos que están involucrados son más complicados.
A.4. Relaciones: - Selección de la representación adecuada para una misma cantidad en cada situación o problema. - Patrones y regularidades numéricas.	Una posible actividad a realizar en este bloque sería la siguiente: En cada una de las dos series, los triángulos se obtienen uniendo los puntos medios de los lados. Calcula el área de los triángulos sombreados, así como de los triángulos que ocupen los lugares 4, 10 y 15 de la serie (Gairín y Sancho, 2002): Serie 1:  Serie 2: 

	Tareas similares, se pueden encontrar en la página nrich (proyecto integrado en el centro de recursos de aprendizaje para el currículo escolar e investigaciones asociadas mantenido por profesorado de la Universidad de Cambridge). El trabajo de patrones y regularidades se debe hacer conjuntamente con el sentido algebraico y computacional, en particular con el bloque D.1.
A.5. Razonamiento proporcional: - Porcentajes: comprensión y resolución de problemas. - Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, velocidad y tiempo, etc.).	Los aumentos y las disminuciones porcentuales a menudo generan problemas de cálculos engorrosos. Este puede ser un buen momento para utilizar hojas de cálculo. Son de sobra conocidas las promociones en las que te ofrecen un determinado producto "sin IVA" La publicidad da la falsa sensación de que se aplica un descuento del 21% cuando en realidad nos están aplicando el precio de antes de aumentar el 21%. Se puede hacer un estudio y calcular el descuento real. A partir de los datos podemos extraer una serie de conclusiones, más allá del estudio del descuento real. ¿Merece la pena acudir a este tipo de establecimientos? Si tenemos en cuenta otros gastos como comida o gasolina, a lo mejor debemos optar por la compra de cercanía.
A.6. Educación financiera: - Información numérica en contextos financieros sencillos: interpretación. - Métodos para la toma de decisiones de consumo responsable: relaciones calidad-precio y valor-precio en contextos cotidianos.	Las matemáticas nos proporcionan herramientas útiles para el fomento del consumo responsable. A través de un gráfico como este y con el precio por litro de la gasolina y del gasoil que haya en ese momento, se pueden elaborar tablas que relacionan el gasto en gasolina en 100 km según la velocidad media. Se puede calcular el ahorro en tiempo y obtener conclusiones acerca de si el tiempo que se gana compensa el aumento de consumo de combustible y por lo tanto de dinero. Con todas las ventajas que ofrece el manejo de las hojas de cálculo, como adecuar el precio del combustible a la situación actual o estudiar el consumo según el tipo de vehículo.

Precio inicial	Precio sin IVA (es el precio antes de aplicarle el IVA)	Precio con descuento del 21%	¿Cuánto quiere la publicidad que crea que me ahorro?	¿Cuánto nos vamos a ahorrar en realidad?	Descuento real
10,00 €	8,26 €	7,90 €	2,10 €	1,74 €	17,36%
100,00 €	82,64 €	79,00 €	21,00 €	17,36 €	17,36%
1.000,00 €	826,45 €	790,00 €	210,00 €	173,55 €	17,36%
10.000,00 €	8.264,46 €	7.900,00 €	2.100,00 €	1.735,54 €	17,36%



	velocidad (km/h)	consumo (l/100km)	precio por litro (€)	gasto (€)	tiempo (minutos)
gasóleo	90	4	1,4	5,6	67
	100	4,8	1,4	6,72	60
	110	5,8	1,4	8,12	55
	120	6	1,4	8,4	50
	130	7	1,4	9,8	46
	140	7,8	1,4	10,92	43
	150	8,2	1,4	11,48	40
	160	9,2	1,4	12,88	38
gasolina	90	6	1,6	9,6	67
	100	6,8	1,6	10,88	60
	110	7,8	1,6	12,48	55
	120	8,5	1,6	13,6	50
	130	9,5	1,6	15,2	46
	140	10,8	1,6	17,28	43
	150	12	1,6	19,2	40
	160	13	1,6	20,8	38

B. Sentido de la medida

En este curso de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, el alumnado debe ampliar sus experiencias de medición directa de áreas y volúmenes para profundizar su comprensión del área de figuras bidimensionales y del área y el volumen de objetos tridimensionales. Las fórmulas y procedimientos de las mediciones indirectas deben desarrollarse a través de la investigación, sin caer en el error de facilitar una larga lista de fórmulas a memorizar. Como novedad, para desarrollar la estimación en el aula de secundaria utilizaremos los problemas de Fermi. En ellos, se solicita estimar el valor numérico de alguna o varias cantidades concretas sin proporcionar información sobre la naturaleza o características del contexto, ni ligarse a estrategias concretas de resolución.

Conocimientos, destrezas y actitudes

B.1. Magnitud: - Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos: investigación y relación entre los mismos. - Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida.	Las tareas de medida directa nos permiten trabajar las distintas magnitudes observables. Asimismo, debemos dejar en manos del alumnado la selección del instrumento de medida y de las unidades en función de la precisión requerida. Se fomentará la realización de trabajos de investigación como el que se propone a continuación para buscar relaciones entre magnitudes. Por ejemplo, se puede indagar sobre las exploraciones científicas que se realizaron para medir arcos del meridiano terrestre que permitiera extraer conclusiones sobre la forma de la esfera terrestre y como referencia para establecer una medida universal que no dependiera de las medidas antropométricas. Asimismo, se puede investigar sobre la necesidad histórica de las distintas civilizaciones de medir el tiempo y su vinculación con la astronomía.
B.2. Medición: - Longitudes, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales: aplicación de fórmulas. - Representaciones planas de objetos tridimensionales en la visualización y resolución de problemas de áreas. - Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas.	En este curso académico se sigue la línea del curso anterior. Las actividades de este bloque se desarrollarán a través de situaciones de comparación (directa e indirecta), ordenación, medida (tanto de cálculo como de construcción) y estimación (desarrollada en el bloque anterior). En los cursos anteriores se ha trabajado la deducción e interpretación de las fórmulas que permiten obtener longitudes, áreas y volúmenes en formas planas y tridimensionales, así como el teorema de Pitágoras, Thales y la semejanza. En el caso de que se detecte una falta de comprensión de estas técnicas en la evaluación inicial, será importante volver a trabajar la deducción e interpretación de las fórmulas y teoremas que nos permiten medir longitudes, superficies o volúmenes de forma indirecta. La experimentación tiene que seguir presente, aunque tiene menos protagonismo que en los cursos anteriores. Destaca la construcción de modelos del mundo real y el desarrollo de técnicas de resolución de problemas en los que interviene la medida. Asimismo, se deben plantear problemas que requieran reconocer o visualizar las características del espacio y la forma, manipulando físicamente o mediante el uso de programas de geometría que permitan analizar las características del espacio, la forma y el cambio en el movimiento de las figuras, el razonamiento, argumentación y demostraciones lógicas y formales al justificar las proposiciones planteadas.
B.3. Estimación y relaciones: - Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones. - Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida.	La importancia de trabajar la estimación reside en la utilidad práctica que tiene en multitud de fenómenos y situaciones cotidianas. Por tanto, es importante saber estimar y valorar las estimaciones realizadas por otras personas (Gairín y Sancho, 2002). Sin embargo, estimar una medida con cierto grado de exactitud requiere la comprensión de los conocimientos matemáticos presentes en la medida de una cantidad de magnitud. Entendemos la estimación de una medida como un proceso de medida sin uso de herramientas y sin un referente físico, pero con el conocimiento de los principios de medida (Joram, 2003; Joram et al., 2005; Pizarro, 2015). Así, para poder plantear tareas de estimación, es necesario haber realizado actividades prácticas de medida que permitan al alumnado tener ese referente interno. El trabajo de

	la estimación y las situaciones que se plantean deben estar ligadas a las magnitudes trabajadas en el aula. Conviene distinguir entre estimación de magnitudes discretas y continuas y considerar si la cantidad de magnitud a estimar admite una organización espacial gráfica o manipulativa (como es el caso de la longitud, superficie o amplitud angular) o no (como es el caso del tiempo o la masa) (Segovia y de Castro, 2013). Además de considerar diferentes magnitudes, un buen diseño didáctico debe tener en cuenta las posibles situaciones que surgen. En Bright (1976) encontramos 8 situaciones de estimación distintas que están divididas en dos categorías principales: realizar una estimación y nombrar qué objeto tiene una determinada medida. Estas 8 situaciones han aparecido recogidas en las orientaciones para la enseñanza del primer curso de la etapa y, por economía de espacio, no las ilustramos en este curso. Este tipo de actividades se pueden complementar con los problemas de Fermi. Albarracín (2017) en su trabajo recoge problemas de estimación de grandes cantidades. El uso de grandes cantidades dificulta los recuentos exhaustivos o las mediciones directas, con lo que el alumnado necesita desarrollar estrategias alternativas para justificar sus estimaciones. Estos autores sugieren que para diseñar las actividades es recomendable utilizar problemas contextualizados en el propio centro educativo, considerando que la familiaridad con el contexto debería promover que los problemas sean más interesantes y accesibles, así como permitir que se pudieran efectuar las mediciones oportunas en un lugar accesible. En el artículo citado, se ejemplifican situaciones de estimación de la cantidad de personas que se pueden disponer en una cierta superficie. P. ej.: ¿Cuánta gente cabe en el patio? y de estimación de la cantidad de objetos que se pueden disponer en una cierta superficie o volumen. P. ej.: ¿Cuántos folios hay en un montón como el que está en la mesa del maestro? ¿Cuántos libros hay en estas estanterías? El trabajo de la estimación está estrechamente ligado con el error cometido y debe concretarse cuándo éste es aceptable. En Chamorro y Belmonte (1988) encontramos que la estimación es aceptable si el error absoluto no supera el 0.1, es decir, el 10 por ciento de la medida del objeto, aunque el grado de error admisible depende de la edad del alumnado y la precisión en los resultados va evolucionando a lo largo de los años (Segovia y Castro, 2009).
C. Sentido espacial	
Los elementos geométricos sujetos a estudio en tercero de ESO incluyen ya elementos introductorios de la geometría analítica y de los movimientos geométricos como los giros, traslaciones y simetrías, de los que se estudian sus propiedades, así como las relaciones que existen entre ellos. Para comprenderlos mejor, el uso de materiales manipulativos y herramientas informáticas como los programas de geometría dinámica son determinantes.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	
C.1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones: - Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características. - Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales.: identificación y aplicación. - Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…)	Al igual que en otros cursos, proponemos que la relación entre formas de dos y tres dimensiones se lleve a cabo con un fuerte soporte físico, al menos en los momentos iniciales, ya que, si solo empleamos el libro de texto, en realidad solo emplearíamos figuras en dos dimensiones y la proyección de figuras de tres dimensiones sobre el plano, que puede entenderse mejor o peor. Tampoco es suficiente la utilización de GeoGebra 3D si bien permite la rotación de la proyección de la figura en el plano dando una sensación bastante realista. Hay modelos físicos de cuerpos huecos, transparentes y rellenables en los que se ve con claridad la intersección entre conos, esferas o cilindros con planos sin más que rellenarlos con arroz, por ejemplo, e inclinarlos, a continuación, se pueden hacer diversas fotos del mismo para que el alumnado entienda lo que es una proyección de la realidad tridimensional sobre el plano. Continuando con la idea formulada para segundo sobre realizar cortes con sierras en cubos de porexpan, en este curso se puede repetir la experiencia si se dispone de esferas de porexpan o de objetos con forma cónica o cilíndrica. Después de comprender bien esta relación, se puede emplear diversas animaciones de GeoGebra como, para las intersecciones de conos, cilindros y esferas con planos: https://www.GeoGebra.org/m/s8a9tt4g#material/b5mg7ws9 (libro de GeoGebra de A. Penagos). Es de interés también trabajar sobre los desarrollos planos de los cuerpos redondos: por ejemplo, el desarrollo plano de un cilindro no tiene porqué ser un rectángulo, puede ser un paralelogramo (ver el cilindro interior de un rollo de papel higiénico); además, surgen problemas de visualización de los desarrollos planos de conos, observándose como la cara lateral suele representarse en ocasiones como un triángulo.
C.2. Localización y sistemas de representación: - Relaciones espaciales: localización y descripción mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.	Arce et al. (2019) alertan de los problemas que pueden surgir en la introducción de la geometría analítica. Particularmente, es posible caer en una “algebrización” de la geometría, por ejemplo, al resolver posiciones relativas de ecuaciones de rectas mediante sistemas de ecuaciones. También se puede producir una cierta ruptura si el alumnado no percibe la geometría analítica como una herramienta para abordar problemas más complejos que los que se resuelven con la geometría sintética. Gascón (2002) propone una serie de problemas sobre construcciones con regla y compás para justificar la necesidad de introducir técnicas analíticas. La explicación desde un punto de vista matemático de lo que representa una proyección cartográfica puede servir de enlace con la asignatura de Geografía, para ello puede resultar de interés el recursowww.thetruesize.com que muestra las diferentes deformaciones en el área según la latitud de los diferentes territorios.
C.3. Movimientos y transformaciones:	Gutiérrez y Jaime (1991) presenta una serie de actividades para trabajar los giros según el modelo de fases de van Hiele. Desde otro punto de vista, Morera et al. (2012) presentan su enseñanza a través de la resolución de problemas en un entorno tecnológico. Las transformaciones deben presentarse

- Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas.	fundamentalmente como solución a problemas reales o, al menos, realistas. También aparecen, lógicamente, en contextos de tipo plástico (teselaciones de Escher https://www.GeoGebra.org/m/vsyrtwmd) o para describir las teselaciones del plano (Taller de A. Gallardo para el día de las Matemáticas en el CEMAT https://www.GeoGebra.org/m/b8h8hkeu). La presencia de mosaicos y frisos en distintos monumentos del patrimonio aragonés permitirá descubrir e investigar la geometría de las transformaciones para explorar las características de las reflexiones, giros y traslaciones. En la web del programa conexión matemática (https://conexionmatematica.catedu.es/) se puede encontrar la actividad "Baldosa Aragonesa" que trata sobre transformaciones, frisos y mosaicos en Aragón. También en la página del Ayuntamiento de Zaragoza, http://www.zaragoza.es/ciudad/educacion/rutasmatematicas.htm se encuentran guías de trabajo para el profesorado y el alumnado para realizar rutas matemáticas por Zaragoza en las que se estudian estos elementos geométricos.
C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica: - Modelización geométrica para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. - Relaciones geométricas: investigación en diversos sentidos (numérico, algebraico, analítico) y diversos campos (arte, ciencia, vida diaria…).	En el interés de relacionar los distintos sentidos y saberes del currículo, puede ser de interés trabajar el Teorema de Pick. En este Teorema, explicado en el artículo de Jiménez-Gestal y Blanco (2017) se trata de encontrar una fórmula para el cálculo de áreas sobre un geoplano en función del número de puntos interiores y del número de puntos en los lados. Lógicamente, no proponemos dar el teorema como un contenido de la asignatura, sino desarrollar un proceso de inducción de una fórmula a partir de unos casos particulares que obligan a poner en juego herramientas ya conocidas de cursos anteriores. El trabajo de inducción de la fórmula promueve la aparición de estrategias informales para el cálculo de áreas como la composición y descomposición en el cálculo de áreas. Además, conecta con otros conocimientos básicos de la Geometría de secundaria como el teorema de Pitágoras, la semejanza de polígonos o las fórmulas de cálculo de áreas de figuras sencillas. El estudio de las fórmulas que aparecen (en función de n e i, puntos en los lados y puntos en el interior) y su posterior comprobación en otros polígonos enlaza muy bien con la idea de obtención de términos de una sucesión. NOTA: dado que es posible que el Centro no cuente con geoplanos, se puede utilizar el geoplano virtual del MathLearning Center (https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/). Se puede establecer luego una conexión con el álgebra dando al final del estudio geométrico de estos objetos la deducción de la fórmula algebraica. Se propone para este curso el trabajo con lugares geométricos no rectos como la elipse, la parábola y la hipérbola. Es adecuado trabajar el descubrimiento de estos lugares mediante herramientas físicas como un hilo y dos chinchetas para el trazado de la elipse y, posteriormente, su trabajo a través de construcciones de GeoGebra. La relación entre matemáticas y arte se puede explorar, por ejemplo, a partir de las diversas teselaciones semiregulares del plano y las formas de rellenar el espacio como se pueden ver en https://www.GeoGebra.org/m/Gx87CAcL#chapter/34205. En este interés de enlazar con el arte, en este trabajo de teselación se puede trabajar sobre la obra de M. C. Escher (https://www.wikiart.org/es/m-c-escher).
D. Sentido algebraico y pensamiento computacional	
El objetivo principal en este curso será consolidar y profundizar los conocimientos, destrezas y actitudes de los dos cursos anteriores. Se debe continuar mostrando al alumnado que el álgebra es un lenguaje útil en situaciones distintas, en particular para expresar generalizaciones de propiedades, caracterizar patrones y resolver problemas. Las conexiones con otras áreas de las matemáticas también contribuirán a dar sentido y significación al lenguaje algebraico y la resolución de ecuaciones. Durante este curso el alumnado debería ir desarrollando más autonomía en la utilización de recursos tecnológicos como la calculadora, las hojas de cálculo y algún tipo de calculadora gráfica o aplicación de geometría dinámica, y comenzar a reconocer en qué situaciones estas herramientas resultan apropiadas.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	
D.1. Patrones: - Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos.	En este curso se puede continuar el estudio de patrones numéricos y geométricos como punto de partida para introducir y manipular expresiones algebraicas. En el estudio de patrones nos encontramos frecuentemente con progresiones aritméticas, por lo que se puede considerar el realizar un estudio más detallado de las mismas durante este curso. A la hora de caracterizar una progresión aritmética podemos hacerlo desde dos perspectivas. En sucesiones sencillas se puede obtener el término general por comparación con los múltiplos de la diferencia. Es decir, la sucesión 5, 12, 19, 26, 33, … se genera sumando 7 al término anterior, por lo tanto, se comporta como los múltiplos de 7: 7, 14, 21, 28, 35, … Por inspección se deduce directamente que el término general de nuestra sucesión es por lo tanto $7n - 2$. Más en general, a partir del ejemplo como 5, 12, 19, 26, 33, … el alumnado puede observar que el número de saltos de longitud 7 entre el primer término y el término n-ésimo es $n - 1$, y a partir de aquí deducir que cualquier término de la sucesión se obtiene como $5 + 7(n - 1)$. Con el estudio de varios ejemplos el alumnado obtendrá la expresión habitual del término general. Un problema asociado habitualmente al estudio de este tipo de sucesiones es el cálculo de la suma de los primeros términos. Un punto de partida para este trabajo puede ser calcular la suma de los primeros 100 números naturales, enlazando la resolución del problema con la historia de las matemáticas y el matemático Carl Friedrich Gauss, o también se puede conectar con los números triangulares. Observamos que el método para calcular el total, sumar el primer y último elemento, multiplicar por el número de elementos y dividir entre dos, es fácil de comprender y no requiere la memorización de fórmulas complicadas. Con respecto a las progresiones geométricas, que suelen aparecer acompañando a las aritméticas en los libros de texto, en este curso pueden considerarse dentro del contexto de modelos de crecimiento exponencial, y ya en el cuarto curso podrían trabajarse más formalmente.

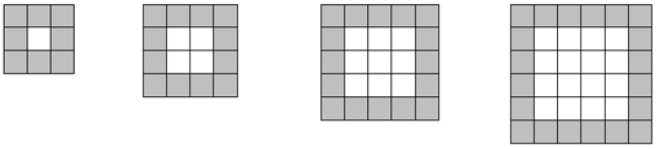
	Se ha mencionado anteriormente que es conveniente también que el alumnado trabaje con relaciones numéricas y patrones en los que intervienen más de una variable, como por ejemplo el Teorema de Pick, cuyo estudio se propone en el apartado C.4. del sentido espacial, y que nos permitirá relacionar varios saberes (numérico, de la medida, geométrico y algebraico).
D.2. Modelo matemático: - Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico. - Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.	Es conveniente continuar trabajando usando distintos tipos de representaciones, como gráficas, tablas y ecuaciones a la hora de trabajar la modelización de situaciones y problemas. En este curso conviene consolidar el modelo lineal y cuadrático, estudiando algún problema en el que aparezcan los mismos, y aprovechando que el alumnado ya está más familiarizado con las funciones lineales y cuadráticas. Es conveniente también realizar en este curso un estudio más detallado de modelos de crecimiento exponencial. Este modelo puede trabajarse a partir de situaciones contextualizadas (crecimiento de población, problemas clásicos como el grano en el tablero de ajedrez, intereses bancarios, etc.). El alumnado debe comenzar a reconocer este tipo de crecimiento, las características principales de su gráfica y su expresión algebraica. Asimismo, convendría en este curso dedicar algún tiempo al modelo de proporcionalidad inversa, como primer ejemplo de función racional. Al iniciar el trabajo con este modelo es importante relacionarlo con las funciones lineales para ver semejanzas y diferencias entre ambos modelos. Es recomendable trabajar este modelo a partir de situaciones contextualizadas, tanto de la vida real, como de la Física (como la variación del tiempo en función de la velocidad para recorrer una distancia establecida) o de las matemáticas (representar la altura de un rectángulo en función de la base cuando se ha fijado el área).
D.3. Variable: - Variable: comprensión del concepto en sus diferentes naturalezas.	El uso de tablas, representaciones gráficas y expresiones simbólicas en el estudio y modelización de situaciones en distintos contextos va a contribuir al desarrollo de una comprensión de los diferentes usos de las variables. Por ejemplo, en las situaciones descritas anteriormente el alumnado utiliza gráficos, tablas y expresiones algebraicas para analizar la naturaleza de los cambios en las cantidades en relaciones lineales, cuadráticas, exponenciales y de proporcionalidad inversa.
D.4. Igualdad y desigualdad: - Relaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica. - Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas basados en relaciones lineales y cuadráticas. - Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones y sistemas lineales y ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana. - Ecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología.	Durante este curso debería consolidarse el trabajo con las expresiones y ecuaciones cuadráticas. Con respecto a las ecuaciones cuadráticas se pueden continuar trabajando otros métodos de resolución aparte de la aplicación de la fórmula: factorización, completar el cuadrado y resolución gráfica. Como ya se ha comentado anteriormente, se pueden utilizar los vínculos del álgebra con cuestiones aritméticas y geométricas para dar significado a las expresiones algebraicas que se trabajen y contextualizar su manipulación, a la vez que destacar su utilidad para expresar relaciones y argumentar su validez. En la página web de nrich, por ejemplo, podemos encontrar varias ideas (https://nrich.maths.org/expanding). La resolución gráfica de ecuaciones cuadráticas puede enlazarse con la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones no lineales sencillos. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ puede resolverse gráficamente encontrando la intersección de la curva $y = x^2 - x - 1$ con el eje de abscisas, pero también puede obtenerse como la intersección de la curva $y = x^2 - x$ con la recta $y = 1$, o como la intersección de la curva $y = x^2$ con la recta $y = x + 1$. Se puede trabajar también la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones no lineales que vayan apareciendo en un contexto de resolución de problemas. En este curso se podrían trabajar algunas expresiones racionales sencillas. Estas expresiones las podemos encontrar, por ejemplo, dentro de un contexto de estudio de patrones en operaciones con números racionales. En las siguientes series, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ $\quad$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ $\frac{1}{2}+\frac{3}{10}$ $\quad$ $\frac{2}{7}+\frac{1}{21}$ $\frac{1}{2}+\frac{5}{14}$ $\quad$ $\frac{3}{10}+\frac{1}{30}$ $\frac{1}{2}+\frac{7}{18}$ $\quad$ $\frac{4}{13}+\frac{1}{39}$ ejemplos de una actividad propuesta en https://donsteward.blogspot.com/2011/02/fraction-addsubtract-compilation.html, el alumnado debería estudiar tanto el patrón de formación de las operaciones como el de las respuestas, para posteriormente justificar los resultados manipulando las expresiones racionales obtenidas.
D.5. Relaciones y funciones: - Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan. - Relaciones lineales y cuadráticas: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a	El trabajo con relaciones y funciones está muy relacionado con la modelización. En este curso se consolida el trabajo con los modelos lineales y cuadráticos comenzado en los cursos anteriores. En el segundo curso se ha propuesto introducir los conceptos de pendiente y ordenada en el origen, relacionando la ecuación explícita de la recta $y = mx + n$ con su representación gráfica. En este curso pueden explorarse las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas. El uso de software como GeoGebra o la calculadora gráfica Desmos pueden resultar de gran utilidad para explorar estas ideas. La relación entre las pendientes de dos rectas perpendiculares puede introducirse a través del trabajo con coordenadas, dibujando cuadrados "inclinados" (ver por ejemplo esta actividad de nrich https://nrich.maths.org/6461). En este curso también puede realizarse un estudio sistemático de las funciones cuadráticas y su

partir de ellas. - Estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.	representación gráfica. La relación entre las soluciones de la ecuación y los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas se podía estudiar en el contexto de factorización de expresiones cuadráticas sencillas, como se comenta en las orientaciones del 2º curso. A la hora de determinar el vértice de una parábola no es preciso recurrir a la fórmula: también puede hacerse utilizando la simetría de la parábola, o completando el cuadrado. También en el segundo curso se proponía comenzar a estudiar las transformaciones de funciones en el caso de las parábolas. En este curso se puede consolidar y profundizar este trabajo. Nuevamente las herramientas tecnológicas pueden facilitar este estudio en gran medida. En la página de nrich, se pueden encontrar algunas actividades para trabajar estos aspectos (por ejemplo, https://nrich.maths.org/6544 ohttps://nrich.maths.org/parabolicpatterns). Como se ha comentado en el apartado D.4. el estudio de las gráficas de rectas y parábolas puede hacerse en paralelo al trabajo de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Acompañando el trabajo con los modelos exponencial y de proporcionalidad inversa que se ha comentado en el apartado D.2., pueden comenzar a explorarse las características de las funciones y = a^x, para a>1 y a<1, y de las funciones y = k/x. El estudio más sistemático de estas funciones puede realizarse en el 4º curso.
D.6. Pensamiento computacional: - Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas a otras situaciones. - Estrategias útiles en la interpretación y modificación de algoritmos. - Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.	El pensamiento computacional se trabaja de forma más o menos directa en todos los saberes. En las orientaciones del resto de sentidos encontramos situaciones en las que se trabajan estrategias asociadas a la interpretación y modificación de algoritmos, generalización y resolución de problemas. Con respecto al sentido algebraico, ya se ha comentado que su desarrollo implica trabajar el pensamiento computacional. Esto es así puesto que las habilidades del pensamiento computacional incluyen el reconocimiento de patrones, el diseño y uso de abstracciones, la descomposición de patrones o la determinación de qué herramientas son adecuadas para analizar o solucionar un problema. La propuesta de situaciones que pueden ser analizadas mediante programas u otras herramientas tecnológicas se plantea también en las orientaciones del resto de sentidos. Con respecto al sentido algebraico, en este curso se propone un trabajo más sistemático con los modelos y funciones afines y cuadráticos, así como una primera aproximación a las funciones exponenciales y de proporcionalidad inversa. Este trabajo resultará mucho más completo y rico si se complementa con herramientas como GeoGebra u otras calculadoras gráficas, que el alumnado habría utilizado ya durante cursos anteriores. Durante este curso el alumnado debería también utilizar con soltura la calculadora científica, que es conveniente que se vaya usando desde los primeros cursos.
E. Sentido estocástico	
Los elementos del sentido estocástico sujetos a estudio en tercero de ESO incluyen el trabajo conjunto entre parámetros de centralización y dispersión simultáneamente, la continuación en el trabajo con proyectos comenzando en este curso una cierta formalización de conceptos relativos a la probabilidad como los de suceso, espacio muestral, unión e intersección de sucesos.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	
E.1. Organización y análisis de datos: - Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucran una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales. - Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales. - Gráficos estadísticos: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...) y elección del más adecuado. - Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales. - Variabilidad: interpretación y cálculo, con apoyo tecnológico, de medidas de dispersión en situaciones reales. - Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.	En los cursos anteriores se han llevado a cabo comparaciones entre conjuntos según los parámetros de centralización (en primero) o de dispersión en casos en que los parámetros de centralización resultaban iguales (en segundo, ejemplo del baloncesto). Se propone para este curso la comparación, más compleja, entre conjuntos de datos en los que haya que interpretar la relevancia de las diferencias entre parámetros de centralización y dispersión simultáneamente. Para ello puede resultar de interés estudiar parámetros como el coeficiente de variación. Ortega y Estepa (2006) proponen el inverso del problema habitual: Generar datos, identificación de gráficos, tablas, ... a partir de la información sobre su variación. Por otro lado, se pueden plantear actividades de conjetura sobre los parámetros de una muestra de la que conocemos uno o varios gráficos. Del Pino y Estepa (2019, p. 98) alerta sobre las deficiencias de algunos libros de texto que “no incluían la interpretación conjunta de la media y la desviación típica, así como la comparación de distribuciones, perdiéndose así la oportunidad de generar un significado más completo al trabajar la aplicación práctica de dichos conceptos.”
E.3. Inferencia: - Formulación de preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población.	Resulta adecuado, como hemos señalado para primero de ESO, el trabajo con proyectos estadísticos alrededor de temas de interés del alumnado. Lógicamente, la profundidad del estudio se irá incrementando con el paso de los cursos al incorporar nuevas herramientas estadísticas. Batanero y Díaz (2011) proponen varios proyectos que pueden ser llevados al aula directamente o previa

- Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales. - Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.	adaptación a las circunstancias y niveles del alumnado de que se trate, por ejemplo, el proyecto "¿Cómo son tus compañeros y compañeras de clase?" sería apropiado para este curso.
E.2. Incertidumbre: - Fenómenos deterministas y aleatorios: identificación. - Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada. - La probabilidad como medida asociada a la incertidumbre de experimentos aleatorios. - Asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace.	En el segundo ciclo se debe avanzar en la formalización de conceptos relativos a la probabilidad como los de suceso, espacio muestral, unión e intersección de sucesos. No obstante, esa formalización no tiene que estar separada de la profundización en la estrategia de construcción de diagramas de árbol asociados a experimentos que se lleven a cabo realmente sino más bien ser un producto de esta. Se pueden utilizar dados con forma de dodecaedro o de icosaedro para realizar los experimentos. El alumnado confunde frecuentemente independencia con incompatibilidad. Tras haber llevado a cabo en el curso anterior experimentos compuestos que daban lugar a tablas o a árboles en los que se mostraban los diferentes sucesos posibles, se debe profundizar en estas estrategias para la comprensión de la regla del producto y de la independencia de sucesos. Actividades como repartiendo premios, propuesta enhttps://nrich.maths.org/9843, plantean la reflexión sobre el significado de la independencia de sucesos desde el aprendizaje a través de la resolución de problemas. La comprensión de las simulaciones que acompañan las experimentaciones pasa por reflexionar sobre la dificultad de construir números aleatorios. Esta reflexión se puede hacer mediante una adaptación del experimento explicado por Batanero (2001) en el que unas personas tiran monedas 100 veces para tener una secuencia realmente aleatoria y otros construyen esa secuencia sin tirar la moneda, después se comparan los resultados y se trata de descubrir quiénes son los que "hacen trampas" al construir la secuencia.
F. Sentido socioafectivo	
El sentido socioafectivo está muy relacionado con la Competencia Personal, Social, y de Aprender a Aprender (CPSAA). El desarrollo de esta competencia implica, por una parte, plantear situaciones en las que el alumnado tenga la oportunidad de reflexionar sobre sí mismo, sus actitudes y sobre cómo se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, se debe atender también al desarrollo de las destrezas sociales, el trabajo en equipo y la creación de relaciones saludables. Dentro de las matemáticas la resolución de problemas es un elemento central, en el que de forma natural el alumnado se va a encontrar situaciones en las que deba enfrentarse a un reto, hacer frente a la incertidumbre, gestionar su estado emocional ante las dificultades y desarrollar actitudes de perseverancia y resiliencia. Para propiciar el trabajo efectivo en estos aspectos es necesario establecer un clima en el aula en el que se favorezcan el diálogo y la reflexión, se fomente la colaboración y el trabajo en equipo, y se valoren los errores y experiencias propias y de los demás como fuente de aprendizaje. Otro elemento integral del sentido socioafectivo en las matemáticas es promover la erradicación de ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato. Con este objetivo se propone, por ejemplo, el uso de actividades que den lugar a un aprendizaje inclusivo (por ejemplo, tareas ricas o actividades de "suelo bajo y techo alto"). Por otra parte, hay que incluir oportunidades para que el alumnado conozca las contribuciones de las mujeres, así como de distintas culturas y minorías, a las matemáticas, a lo largo de la historia y en la actualidad.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	
F.1. Creencias, actitudes y emociones: - Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación. - Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas. - Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.	La resolución de un problema significa comprometerse con la solución de una tarea para la que no se conoce previamente el método de solución. Al abordar los problemas, el alumnado tiene que razonar matemáticamente, emplear sus conocimientos matemáticos y en ocasiones, adquirir nociones matemáticas nuevas. La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas lleva aparejado el desarrollo de actitudes básicas para el trabajo matemático: perseverancia, flexibilidad, estrategias personales de autocorrección y de superación de bloqueos, confianza en las propias posibilidades, iniciativa personal, curiosidad y disposición positiva a la reflexión sobre las decisiones tomadas y a la crítica razonada, planteamiento de preguntas y búsqueda de la mejor respuesta, aplicando lo aprendido en otras situaciones y en distintos contextos, interés por la participación activa y responsable en el trabajo en pequeño y gran grupo. Para ello, no se trata, por tanto, de que el alumnado reciba instrucción directa sobre educación emocional, ni sobre los componentes de la dimensión afectiva en matemáticas (valores, creencias, actitudes y emociones) y sus diferencias, sino que en la práctica diaria de clase diseñada por el profesorado ponga en juego distintas estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo como favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas; revisar los pasos seguidos en la resolución de una tarea para plantearse si hay errores o si lo obtenido puede emplearse en otras situaciones; revisar las distintas resoluciones obtenidas, enfatizando en que no hay una única manera de resolver un problema; identificar en las tareas cuáles

	son los aspectos clave para su resolución y prever qué tipo de andamiaje ofrecer al alumnado en caso de bloqueo, etc.
F.2. Trabajo en equipo, toma de decisiones, inclusión, respeto y diversidad: - Técnicas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático. - Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos. - Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad. - La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde una perspectiva de género y multicultural.	El trabajo en pequeños grupos heterogéneos, de tres o cuatro estudiantes, a ser posible conformados de manera aleatoria, hace que el alumno o la alumna no se tenga que afrontar solo al problema que se plantea y se sienta más seguro al expresar sus ideas en condiciones de igualdad. No se trata de trabajar de forma cooperativa para elaborar un producto final que hay de entregar, ni de llevar a cabo roles específicos. Es cuestión de interactuar, de conversar entre iguales para discutir formas de abordar un problema, llegar a acuerdos. Cuando la cultura de aula incorpora de forma natural y cotidiana estas interacciones, las estrategias personales que pueda tener cada alumno y cada alumna de forma espontánea se ven ampliadas y enriquecidas, al mismo tiempo que obliga a utilizar un lenguaje matemático (en sentido amplio, atendiendo a sus diversos registros, desde el lenguaje oral hasta el simbólico-numérico, pasando por diagramas y esquemas) que comprendan los compañeros y las compañeras. En definitiva, hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. El profesorado debe asumir un papel fundamentalmente de guía que plantea preguntas abiertas al alumnado, preguntas ricas, que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás y a buscar recursos en el aula que necesiten para resolver el problema. También es vital dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. No es suficiente con lanzar la pregunta y acto seguido, a los pocos segundos, desvelar la respuesta. Otro aspecto a tener en cuenta por el profesorado es ser consciente del entorno individual y social del alumnado y usar ese conocimiento para conectar e integrar los contenidos a enseñar y los contextos de las tareas con los intereses reales del alumnado. Las matemáticas son una actividad característica de la especie humana, al igual que la literatura, el arte, la física o la música. Las matemáticas tienen un pasado, un presente y un futuro, y es importante que el alumnado sea consciente de la naturaleza viva de las matemáticas. Las matemáticas no son algo acabado, sino que, a lo largo de la historia, con la contribución de matemáticos y matemáticas del mundo se han ido construyendo las ideas matemáticas que hoy conocemos y que se encuentran en la base de todas las ciencias. Conocer la Historia de la Matemática conlleva, por una parte, entender mejor el desarrollo y motivación de conceptos e ideas en matemáticas, que en ocasiones aparecen desconectados entre sí dentro del currículo. Por otra parte, puede contribuir a cambiar la percepción del alumnado hacia la asignatura, haciéndola más cercana y coherente. Conocer su historia implica también comprender mejor el papel de las matemáticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, y les da un contexto. Por último, una perspectiva histórica nos permite abordar cuestiones como las dificultades de acceso a las matemáticas por parte de la mujer y otras minorías a lo largo de los siglos. Se puede hacer un primer acercamiento a la historia de las matemáticas procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. En este sentido, existen publicaciones que recogen diferentes secuencias didácticas para introducir la historia de las matemáticas en el aula de secundaria, como el monográfico de Barbin et al. (2018), Moyon y Tournés (2018) o la página web Convergence (https://www.maa.org/press/periodicals/convergence). También es posible encontrar otros materiales como lecturas o audiovisuales de contenido matemático, bien de ficción ("Figuras ocultas", "El hombre que conocía el infinito") o no ficción (podcasts, documentales, entrevistas, etc.).

III.2.4. Matemáticas A (4º ESO)

A. Sentido numérico	
Al finalizar este curso, el aprendizaje que hayan adquirido en relación con el sentido numérico puede ser determinante en su vida adulta. Debido al carácter terminal de las matemáticas A, se deben plantear tareas enriquecedoras y lo más contextualizadas posible. A su vez, se tiene que dar mucha importancia al razonamiento, al debate y a las conclusiones que puedan sacar de cada una de las actividades propuestas.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
A.1. Conteo: - Resolución de situaciones y problemas de la vida cotidiana: estrategias para el recuento sistemático.	La búsqueda de patrones en los recuentos desarrolla el pensamiento computacional y está directamente relacionado con el sentido algebraico. Por ejemplo, contar el número de baldosas grises en cada caso. ¿Cuántas baldosas habrá en una cuadrícula de 7x7? ¿de 8x8? ¿de 20x20? ¿y de nxn?  No todo el alumnado será capaz de dar una fórmula general para n baldosas, pero es deseable que sea capaz de encontrar una regularidad y verbalizarla.
A.2. Cantidad: - Realización de estimaciones en diversos contextos analizando y acotando el error cometido. - Expresión de cantidades mediante números reales con la precisión requerida.	Los números decimales deben ser tratados como una notación, no como un conjunto de números. La utilidad de este tipo de expresiones es evidente en diversos contextos como la economía o para alguna otra magnitud que utilizamos en nuestro quehacer diario (pesos, distancias…) Este uso práctico de los decimales tiene una clara consecuencia, la aparición de errores al utilizarlos. La estimación del error es una tarea bastante complicada. Para su cálculo se comienza por el que se comete al aproximar a un determinado orden un número racional. En este caso, utilizando las fracciones, serán capaces de cuantificar el error con exactitud. Para expresar los números periódicos en

- Los conjuntos numéricos como forma de responder a diferentes necesidades: contar, medir, comparar, etc.	forma de fracción, es más útil utilizar la calculadora que fórmulas engorrosas que no aportan nada. Los métodos basados en técnicas algebraicas son más interesantes, pero también se acaban utilizando de forma demasiado mecánica. En una segunda fase, se podrá acotar el error cometido al aproximar un número irracional a una expresión decimal. Comprender la mejor acotación del error de una cifra redondeada (la mitad de una unidad del orden de la última cifra significativa) requiere tener el sentido numérico muy desarrollado y puede generar confusión y bastante frustración. En ese caso, tomar como cota una unidad de la última cifra significativa, puede considerarse un resultado óptimo. El error relativo se asimila mucho mejor si lo trabajamos utilizando contextos reales. "No es lo mismo un error de 1 cm al medir un armario que al medir un campo de fútbol". En el uso de los diferentes conjuntos numéricos, se tendrá muy en cuenta el contexto, sin permitir resultados absurdos, pero dejando abierta la posibilidad de elección en la medida de lo posible.
A.3. Sentido de las operaciones: - Operaciones con números reales en la resolución de situaciones contextualizadas. - Propiedades de las operaciones aritméticas: cálculos con números reales, incluyendo con herramientas digitales. - Algunos números irracionales en situaciones de la vida cotidiana.	La realización de ejercicios repetitivos de operaciones combinadas no es objetivo de este curso, sí lo es la resolución de problemas en los que sean precisas tales operaciones. En los cálculos es recomendable utilizar herramientas digitales como calculadoras u hojas de cálculo. Saber manejar los números reales en situaciones cotidianas implica manejar la calculadora con propiedad (por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de una suma).
A.4. Relaciones: - Patrones y regularidades numéricas en las que intervengan números reales. - Orden en la recta numérica. Intervalos.	El estudio de patrones y regularidades numéricas se puede realizar desde el sentido algebraico, como se describe en el apartado D.1 Un buen sentido numérico, implica comprender la recta real. Su organización ordenada, los subconjuntos que podemos describir en ella (discretos o continuos, acotados superior o inferiormente, abiertos o cerrados) y su densidad.
A.5. Razonamiento proporcional: - Situaciones de proporcionalidad directa e inversa en diferentes contextos: desarrollo y análisis de métodos para la resolución de problemas.	La elaboración de gráficas que describan situaciones reales que puedan aproximarse a una situación de proporcionalidad directa o inversa, puede reforzar la idea de que no todo es proporcional y que, en muchas ocasiones, la proporcionalidad responde a una idealización de la realidad que ayuda a predecir fenómenos. De este modo, damos un nuevo enfoque al problema de la proporcionalidad. La proporcionalidad directa e inversa se puede abordar desde un punto de vista algebraico o funcional (D.2).
A.6. Educación financiera: - Métodos de resolución de problemas relacionados con aumentos y disminuciones porcentuales, intereses y tasas en contextos financieros.	El estudio del interés simple y compuesto debe hacerse en contextos reales en los que se analicen situaciones cercanas al alumnado. Por ejemplo, "contratamos un viaje que cuesta 6000€. Lo pagaremos en 6 plazos con un interés mensual del 3%. ¿Cuánto pagamos de cuota al mes y cuánto cuesta finalmente el viaje?" El cálculo de la cuota mensual requeriría conocimientos de sumas de progresiones geométricas o el uso de una fórmula bastante engorrosa, pero se puede realizar con la mayoría de las calculadoras de los teléfonos móviles. Una vez se conoce la cuota mensual, se pueden trabajar tablas de amortización para comparar cálculos y para explicar en qué consiste el sistema de amortización francés. El uso de las tablas, como en anteriores ocasiones, nos permite hacer comparativas, tomar decisiones y representar los datos utilizando gráficas.

capital pendiente	tipo de interés	n de cuotas restantes	cuota	intereses que pago	amortizado	capital pendiente
6.000,00 €	3%	6	1.107,59 €	180,00 €	927,59 €	5.072,41 €
5.072,41 €	3%	5	1.107,59 €	152,17 €	955,41 €	4.117,00 €
4.117,00 €	3%	4	1.107,59 €	123,51 €	984,07 €	3.132,93 €
3.132,93 €	3%	3	1.107,59 €	93,99 €	1.013,60 €	2.119,33 €
2.119,33 €	3%	2	1.107,59 €	63,58 €	1.044,01 €	1.075,33 €
1.075,33 €	3%	1	1.107,59 €	32,26 €	1.075,33 €	0,00 €
			6.645,51 €			

B. Sentido de la medida

El sentido de la medida nos permite comprender y comparar atributos o cualidades del mundo que nos rodea, por lo que forma parte de nuestra vida social, profesional y personal. Este sentido se caracteriza por la capacidad de contabilizar, comparar y estimar una cantidad de magnitud. En el último curso de esta etapa académica, el sentido de la medida se trabaja a través de la tasa de variación media en situaciones cercanas en las que intervienen distintas magnitudes. Este trabajo permite introducir en cursos posteriores la derivada como la medida del cambio que conecta el cálculo de derivadas con la física en situaciones en las que aparecen cambios que se quieren cuantificar.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
B.1. Medición: - La pendiente y su relación con un ángulo en situaciones sencillas: deducción y aplicación.	Una concepción intuitiva de la pendiente está ligada a la inclinación de una recta y aparece en situaciones cercanas como señales de tráfico, indicaciones en los puertos de montaña, pendiente mínima para colocar un desagüe, etc. El análisis de las rampas y escaleras públicas cumplen la normativa de accesibilidad vigente es una interesante situación que nos permite comprender las dificultades de personas con movilidad reducida cuando analizamos si estas condiciones de accesibilidad se cumplen (Blanco, 2020). Aunque el cálculo de la pendiente de una recta y su interpretación geométrica puede enfocarse desde distintas perspectivas (Azcárate, et al., 1996), inicialmente lo interpretaremos como la medida de la inclinación. Tras presentar la idea intuitiva a través de ejemplos concretos, se deberá afinar el concepto y sistematizar los procedimientos de cálculo asociándose al sentido numérico (razón y proporcionalidad, unidades que se asciende en vertical por cada unidad en horizontal), al sentido algebraico (parámetro coeficiente de la variable independiente y=ax+b) y al sentido geométrico (grado de inclinación de una recta que puede ser relacionado con el ángulo sobre una recta paralela al eje horizontal).
B.2. Cambio: - Estudio gráfico del crecimiento y decrecimiento de funciones en contextos de la vida cotidiana con el apoyo de herramientas tecnológicas: tasas de variación absoluta, relativa y media.	Antes de comenzar, es necesario tener en cuenta que en 2ºESO ya se ha trabajado la idea de inclinación que está asociada al concepto de pendiente. Este bloque de saberes también se relaciona estrechamente con los saberes del sentido algebraico y computacional, en especial con el bloque D.5. Relaciones y funciones, por lo que se sugiere trabajar de forma conjunta estos bloques. Las simulaciones a través de programas como GeoGebra o Derive o la propia realidad cotidiana proporcionan una base intuitiva para este concepto. Por tanto, el uso de herramientas tecnológicas amplía las posibles representaciones del concepto de tasa de variación: simbólica y numérica, visual y formal. La tasa media de variación entre las abscisas a y b puede abordarse desde el modelo geométrico y cinemático, este último modelo nos permite hablar de la velocidad media entre dos instantes. En el modelo geométrico, la tasa media de variación corresponde a la pendiente de la secante a la curva en dos puntos dados (a,f(a)) y (b,f(b)). Algunas situaciones cercanas donde podemos trabajar la tasa de variación son: magnitudes en función del tiempo (consumo, producción, temperatura, precio, ocupación, etc.), relación entre dos magnitudes donde no interviene el tiempo (por ejemplo: coste-beneficio en función de la cantidad fabricada).

C. Sentido espacial

Los elementos geométricos sujetos a estudio en tercero de ESO incluyen ya elementos de desarrollo de la geometría analítica y del razonamiento y modelización geométricos. En este curso se busca también el estudio de la presencia de la geometría en la vida cotidiana. Para comprenderlos mejor, el uso de herramientas informáticas como los programas de geometría dinámica son determinantes.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
C.1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones: - Propiedades geométricas de objetos de la vida cotidiana: investigación con programas de geometría dinámica.	El libro Geometría cotidiana (Alsina, 2005) contiene numerosos ejemplos que pueden dar pie a actividades de aula en los que se muestran objetos de la vida cotidiana y cómo la Geometría ha influido notablemente en su diseño, por ejemplo, el capítulo 4 trata del diseño de cajas, el 5 a la presencia de objetos de forma poliédrica en nuestras vidas…
C.2. Movimientos y transformaciones: - Transformaciones elementales en la vida cotidiana: investigación con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica, realidad aumentada, etc.	Los movimientos y transformaciones estudiados en cursos anteriores se tratarán en este curso con herramientas analíticas, lo que no quiere decir perder de vista el sentido geométrico de los mismos y mantener la doble perspectiva analítico-sintética siempre presente para evitar la posibilidad de que la Geometría quede oculta en medio de una algebrización de la misma.
C.3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica: - Modelos geométricos: representación y explicación de relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas. - Modelización de elementos geométricos de la vida cotidiana con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica, realidad aumentada… - Elaboración de conjeturas sobre propiedades geométricas utilizando	El desarrollo del razonamiento según los Niveles de van Hiele comprende cuatro procesos: el reconocimiento, la clasificación, la definición y la demostración. Para el inicio al trabajo de la demostración, es adecuado primero realizar conjeturas sobre aquello que después se va a demostrar. Estas conjeturas se pueden llevar a cabo con ayuda de programas de geometría dinámica como GeoGebra y tratar sobre elementos trabajados en otras partes del currículo de Geometría en este curso o en los anteriores. Por ejemplo, relaciones entre el paralelismo de los lados de un polígono y la relación entre los ángulos opuestos. No obstante, ser capaz de conjeturar no es sinónimo de ser capaz de demostrar. El nivel de razonamiento más probable para el alumnado de 4º de ESO estará entre un nivel 2 y un nivel 3, lo que probablemente le permitirá seguir la demostración que haga el profesorado, pero no hacerla de forma autónoma. Gracias al uso de GeoGebra u otros programas informáticos de geometría dinámica, el alumnado puede generar y explorar rápidamente una serie de ejemplos. Si no se asientan ciertas bases sobre lo que es o no es una prueba y una argumentación matemática, podrían argumentar que una

programas de geometría dinámica u otras herramientas.	conjetura debe ser válida simplemente porque funciona en todos los ejemplos que probaron (rasgo característico del nivel 2 de van Hiele). A pesar de esa posibilidad, si el alumnado entiende el papel de la experimentación, la conjetura y la prueba, el hecho de poder generar y explorar muchos ejemplos puede dar lugar a investigaciones matemáticas más profundas y extensas de lo que sería posible de otro modo.
D. Sentido algebraico y pensamiento computacional	
El objetivo principal en este curso será consolidar y profundizar los conocimientos, destrezas y actitudes de los cursos anteriores. Se debe continuar mostrando al alumnado que el álgebra es un lenguaje útil en situaciones distintas, en particular para expresar generalizaciones de propiedades, caracterizar patrones y resolver problemas. Las conexiones con otras áreas de las matemáticas y las situaciones contextualizadas también contribuirán a dar sentido y significación al lenguaje algebraico.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
D.1. Patrones: - Patrones, pautas y regularidades: observación, generalización y término general en casos sencillos.	En este curso se puede consolidar el trabajo con progresiones aritméticas de 3º de ESO. Esto puede hacerse trabajando en situaciones contextualizadas, buscando por ejemplo enlaces con patrones numéricos o geometría. Esta actividad de nrich (https://nrich.maths.org/2292) conecta la búsqueda del término general de una progresión aritmética con la geometría. Con la ayuda de una hoja de cálculo pueden estudiarse los patrones de crecimiento de progresiones geométricas, y considerar los diferentes casos al sumar sus términos según los valores de la razón. En este curso no es preciso realizar un estudio formal de las progresiones geométricas. El estudio de progresiones geométricas puede realizarse en conexión con el trabajo desarrollado en el sentido numérico descrito en el apartado A.6.
D.2. Modelo matemático: - Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones. - Estrategias de deducción y análisis de conclusiones razonables de una situación de la vida cotidiana a partir de un modelo.	Es conveniente continuar trabajando usando distintos tipos de representaciones, como gráficas, tablas y ecuaciones a la hora de trabajar la modelización de situaciones y problemas. En este curso se debe consolidar el trabajo con los modelos lineal y cuadrático, aplicándolos a la resolución de problemas contextualizados. Pueden incluirse problemas de optimización sencillos, en los que o bien la función a maximizar o minimizar resulte en una expresión lineal o cuadrática, y a partir de sus características se pueda determinar de forma experimental un extremo relativo, o bien se comparan varias situaciones: como por ejemplo en este problema de nrich, https://nrich.maths.org/7342, en el que se comparan los precios de varios aparcamientos. Conviene continuar el trabajo iniciado el curso anterior con el modelo de proporcionalidad inversa, comparándolo con el modelo lineal para resaltar las semejanzas y diferencias entre ambos modelos. El estudio del modelo exponencial debería continuarse desde el trabajo con situaciones contextualizadas. Vemos que por ejemplo aparece en los problemas de intereses bancarios, por lo que puede explorarse en paralelo al trabajo realizado en el apartado A.6.
D.3. Variable: - Variables: asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema y diferentes usos. - Características del cambio en la representación gráfica de relaciones lineales y cuadráticas.	El uso de tablas, representaciones gráficas y expresiones simbólicas en el estudio y modelización de situaciones en distintos contextos contribuye al desarrollo de una comprensión de los diferentes usos de las variables. En las situaciones descritas anteriormente el alumnado utiliza gráficos, tablas y expresiones algebraicas para analizar la naturaleza de los cambios en las cantidades en relaciones lineales, cuadráticas, exponenciales y de proporcionalidad inversa.
D.4. Igualdad y desigualdad: - Relaciones lineales, cuadráticas y de proporcionalidad inversa en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica. - Formas equivalentes de expresiones algebraicas en la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, y sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales. - Estrategias de discusión y búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana. - Ecuaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología.	En este curso se continúa el trabajo con ecuaciones lineales y cuadráticas. Este tipo de ecuaciones aparece en el estudio de los correspondientes modelos, comentados anteriormente. En cuanto a técnicas de resolución, se continuarían desarrollando las comentadas en el curso anterior, intentando su planteamiento dentro de un contexto de resolución de problemas o estudios de modelos. El estudio de relaciones de proporcionalidad inversa puede llevar al planteamiento de ecuaciones racionales sencillas, cuya resolución puede practicarse dentro de dichos contextos. Un trabajo de comparación entre varios modelos lineales, como el que se comenta en el apartado D.2., puede ser un buen punto de partida para plantear la resolución algebraica de inecuaciones lineales, comparando los resultados obtenidos en la resolución algebraica con los resultados obtenidos a partir de tablas, descripciones de características de las funciones implicadas y su representación gráfica. El uso de rectas numéricas para representar desigualdades del tipo x>3, x<–2, etc., pueden ayudar a la comprensión de estas expresiones. La introducción de inecuaciones a partir de la resolución de un problema (por ejemplo: “Dado que un ascensor tiene una masa de 800 kg y el cable que lo sostiene tolera hasta 1400 kg de peso, ¿cuántas personas pueden viajar en el ascensor de manera segura?”) facilitará el que este tipo de expresiones tengan sentido para el alumnado. La resolución de sistemas de ecuaciones lineales, junto con su interpretación gráfica como intersección de dos rectas, se habría trabajado en cursos anteriores. La resolución de problemas que requieran un modelo de este tipo (por ejemplo, el problema planteado en https://nrich.maths.org/warmsnug) permitirá profundizar y consolidar este trabajo.
D.5. Relaciones y funciones: - Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan. - Relaciones lineales y no lineales:	El estudio de funciones en este curso debería enfocarse en relación al trabajo de modelización comentado en el apartado D.2. Se sugiere también que el trabajo con los bloques de saberes B.1. y B.2. del sentido de la medida se realice de forma conjunta con este bloque y el bloque D.2. de modelización, puesto que tanto el estudio de crecimiento y decrecimiento de funciones como el concepto de tasa de variación van a aparecer en conexión al estudio de funciones y modelos. Las funciones lineales y cuadráticas se habrían trabajado con cierta profundidad en el curso anterior,

identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas. - Representación de funciones: interpretación de sus propiedades en situaciones de la vida cotidiana. cotidiana y selección de los tipos de funciones que las modelizan.	por lo tanto, en este curso se puede concentrar la atención en las características de la función exponencial y la función de proporcionalidad inversa. No debería descuidarse el trabajo cualitativo con funciones, que permite analizar las características de un gráfico, y en particular el tipo de variación de la función. En el libro del Shell Centre for Mathematical Education (1990) (disponible en https://sede.educacion.gob.es/publiventa/el-lenguaje-de-funciones-y-graficas/pedagogia/1065) podemos encontrar gran variedad de actividades para trabajar tanto estos aspectos cualitativos como los aspecto cuantitativos de modelos específicos.
D.6. Pensamiento computacional: - Resolución de problemas mediante la descomposición en partes, la automatización y el pensamiento algorítmico. - Estrategias en la interpretación, modificación y creación de algoritmos. - Formulación y análisis de problemas de la vida cotidiana mediante programas y otras herramientas.	El pensamiento computacional se trabaja de forma más o menos directa en todos los saberes. En las orientaciones del resto de sentidos encontramos situaciones en las que se trabajan estrategias asociadas a la interpretación, modificación y creación de algoritmos, y la resolución de problemas. Por ejemplo, el desarrollo de estrategias de recuento sistemático en el sentido numérico o la elaboración de conjeturas sobre propiedades geométricas en el sentido espacial. Con respecto al sentido algebraico, ya se ha comentado que su desarrollo implica trabajar el pensamiento computacional. Esto es así puesto que las habilidades del pensamiento computacional incluyen el reconocimiento de patrones, el diseño y uso de abstracciones, la descomposición de patrones o la determinación de qué herramientas son adecuadas para analizar o solucionar un problema. La propuesta de situaciones que pueden ser analizadas mediante programas u otras herramientas tecnológicas se plantea también en las orientaciones del resto de sentidos. Dentro del sentido algebraico durante este curso se propone bastante trabajo centrado en la modelización y las relaciones cuantitativas en situaciones contextualizadas. Este trabajo resultará mucho más completo y rico si se complementa con herramientas como hojas de cálculo, GeoGebra, calculadoras gráficas, etc., que el alumnado habría utilizado ya durante cursos anteriores.
E. Sentido estocástico	
Los elementos del sentido estocástico sujetos a estudio en cuarto de ESO incluyen la introducción de técnicas básicas para la selección de muestras, así como la enseñanza de la correlación con la vista puesta en la superación de los problemas conceptuales que acarrea, así como la introducción y diferenciación entre los conceptos de condicionalidad y causalidad.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
E.1. Organización y análisis de datos: - Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucren una variable bidimensional. Tablas de contingencia. - Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de una y dos variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales. - Medidas de localización y dispersión: interpretación y análisis de la variabilidad. - Gráficos estadísticos de una y dos variables: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...), análisis, interpretación y obtención de conclusiones razonadas. - Interpretación de la relación entre dos variables, valorando gráficamente con herramientas tecnológicas la pertinencia de realizar una regresión lineal. Ajuste lineal con herramientas tecnológicas.	Se propone en este curso la introducción de técnicas básicas para la selección de muestras para los estudios estadísticos como el muestreo aleatorio simple y el muestreo estratificado. En las guías Praxis (Borrell et al., 1999) se ofrece una secuencia de enseñanza completa sobre muestreo muy interesante que lleva por título “muestras” y que incluye actividades sobre estos dos tipos de muestreo. Las monografías de Edumat dirigidas y editadas por J.D. Godino son accesibles en http://www.ugr.es/local/jgodino/. Estos materiales también contienen orientaciones específicas, tanto para la distribución e inferencia como para la predictibilidad e incertidumbre.
E.2. Incertidumbre: - Experimentos compuestos: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada. - Probabilidad: cálculo aplicando la regla de Laplace y técnicas de recuento en experimentos simples y compuestos (mediante diagramas de árbol, tablas…) y aplicación a la toma de decisiones fundamentadas	Es frecuente que el alumnado confunda condicionalidad con causalidad. Se propone introducir la idea de probabilidad condicionada con problemas como ¿quién se ha comido mis deberes? (https://nrich.maths.org/9525) y ¿quién miente? (https://nrich.maths.org/9840) que proponen una primera toma de contacto experimental con el concepto previa a la formalización del mismo. Se aconseja el empleo de distintas representaciones que faciliten la organización del recuento de los casos y clasificar sucesos en experimentos simples y compuestos como tablas de contingencia o diagramas de Venn. En este sentido, los diagramas de árbol también son unas representaciones útiles que permiten representar la estructura de muchos problemas combinatorios y probabilísticos, facilitando su resolución (de Hierro et al., 2018) y que aparece en otros sentidos, como el numérico. También el problema de Monty Hall, explicado en Batanero et al. (2009) y cuya simulación podemos ver enhttps://www.mathwarehouse.com/monty-hall-simulation-online/ puede resultar una introducción interesante para ver la utilidad de la probabilidad condicionada y el manejo del

	significado subjetivo o Bayesiano de la probabilidad, accesible a este nivel en su interpretaciones intuitiva y experimental. En el contexto de la resolución de problemas, es adecuado incrementar el nivel formal incluyendo el álgebra de sucesos, si bien esta no debe ser un objeto separado de estudio ya que la formalización debe estar al servicio de la resolución de problemas.
E.3. Inferencia: - Diferentes etapas del diseño de estudios estadísticos. - Estrategias y herramientas de presentación e interpretación de datos relevantes en investigaciones estadísticas mediante herramientas digitales adecuadas. - Análisis del alcance de las conclusiones de un estudio estadístico valorando la representatividad de la muestra.	La enseñanza de la correlación debe superar los problemas detectados por Castro-Sotos et al. (2009) y Engel y Sedlmeier (2011) como la influencia de creencias previas, desestimar el efecto de la regresión, no tener en cuenta el efecto de terceras variables, identificar correlación y causalidad, la falta de apreciación de la correlación negativa e interpretar de forma determinista o funcional la correlación. Batanero y Godino (2001) añaden que "también se han observado dificultades al estimar el coeficiente de correlación desde otras representaciones (verbal tabular, etc.) distintas de la representación gráfica (diagrama de dispersión)." Proponen destacar la importancia del trabajo con distintas representaciones de la asociación estadística (verbal, tabular, gráfica, o numérica). Los mismos autores apuntan que el alumnado muestra dificultad a la hora de diferenciar la variable explicativa de la explicada en el cálculo de la recta de regresión. La paradoja de Simpson (ejemplo: un hospital A parece mejor que otro B para personas enfermas graves y personas enfermas leves por separado, pero al valorarlo sobre la población enferma conjunta resulta mejor el B) se produce cuando se descuida una tercera variable explicativa que provoca la inversión de una asociación (en este caso, podría ser que los enfermos no eligen hospital de forma aleatoria sino por un factor conocido o no). Hay numerosos ejemplos de esta paradoja como el explicado detalladamente en Contreras et al. (2012). Es importante no dar por buena una correlación simplemente por los datos numéricos sin analizar la situación en global y la presencia de terceras variables. El trabajo con la paradoja de Simpson puede servir para aumentar la precaución del alumnado ante la interpretación precipitada de la correlación como causalidad. Se proponen actividades como la siguiente para entender cómo varía la correlación entre dos variables según vamos añadiendo datos y estos se ajustan más o menos a la línea de regresión:http://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_5_correg.html. Lo aprendido sobre muestreo permitirá enriquecer estudios estadísticos en dos variables causa-efecto: tabaquismo-cáncer, por ejemplo. Batanero y Díaz (2011) proponen varios proyectos que pueden ser llevados al aula directamente o previa adaptación a las circunstancias y niveles del alumnado de que se trate, por ejemplo, el proyecto "Estadísticas de la pobreza y la desigualdad" podría ser fácilmente adaptado a este curso.

F. Sentido socioafectivo

El sentido socioafectivo está muy relacionado con la Competencia Personal, Social, y de Aprender a Aprender (CPSAA). El desarrollo de esta competencia implica, por una parte, plantear situaciones en las que el alumnado tenga la oportunidad de reflexionar sobre sí mismo, sus actitudes y sobre cómo se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, se debe atender también al desarrollo de las destrezas sociales, el trabajo en equipo y la creación de relaciones saludables. Dentro de las matemáticas la resolución de problemas es un elemento central, en el que de forma natural el alumnado se va a encontrar situaciones en las que deba enfrentarse a un reto, hacer frente a la incertidumbre, gestionar su estado emocional ante las dificultades y desarrollar actitudes de perseverancia y resiliencia. Para propiciar el trabajo efectivo en estos aspectos es necesario establecer un clima en el aula en el que se favorezcan el diálogo y la reflexión, se fomente la colaboración y el trabajo en equipo, y se valoren los errores y experiencias propias y de los demás como fuente de aprendizaje.

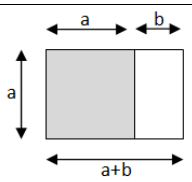
Otro elemento integral del sentido socioafectivo en las matemáticas es promover la erradicación de ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato. Con este objetivo se propone, por ejemplo, el uso de actividades que den lugar a un aprendizaje inclusivo (por ejemplo, tareas ricas o actividades de "suelo bajo y techo alto"). Por otra parte, hay que incluir oportunidades para que el alumnado conozca las contribuciones de las mujeres, así como de distintas culturas y minorías, a las matemáticas, a lo largo de la historia y en la actualidad.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
F.1. Creencias, actitudes y emociones: - Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación. Superación de bloqueos emocionales en el aprendizaje de las matemáticas. - Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas. - Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.	La resolución de un problema significa comprometerse con la solución de una tarea para la que no se conoce previamente el método de solución. Al abordar los problemas, el alumnado tiene que razonar matemáticamente, emplear sus conocimientos matemáticos y en ocasiones, adquirir nociones matemáticas nuevas. La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas lleva aparejado el desarrollo de actitudes básicas para el trabajo matemático: perseverancia, flexibilidad, estrategias personales de autocorrección y de superación de bloqueos, confianza en las propias posibilidades, iniciativa personal, curiosidad y disposición positiva a la reflexión sobre las decisiones tomadas y a la crítica razonada, planteamiento de preguntas y búsqueda de la mejor respuesta, aplicando lo aprendido en otras situaciones y en distintos contextos, interés por la participación activa y responsable en el trabajo en pequeño y gran grupo. Para ello, no se trata, por tanto, de que el alumnado reciba instrucción directa sobre educación emocional, ni sobre los componentes de la dimensión afectiva en matemáticas (valores, creencias, actitudes y emociones) y sus diferencias, sino que en la práctica diaria de clase diseñada por el profesorado ponga en juego distintas estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo como favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos

	matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas; revisar los pasos seguidos en la resolución de una tarea para plantearse si hay errores o si lo obtenido puede emplearse en otras situaciones; revisar las distintas resoluciones obtenidas, enfatizando en que no hay una única manera de resolver un problema; identificar en las tareas cuáles son los aspectos clave para su resolución y prever qué tipo de andamiaje ofrecer al alumnado en caso de bloqueo, etc.
F.2. Trabajo en equipo, toma de decisiones, inclusión, respeto y diversidad: - Asunción de responsabilidades y participación activa, optimizando el trabajo en equipo. Estrategias de gestión de conflictos: pedir, dar y gestionar ayuda. - Métodos para la gestión y la toma de decisiones adecuadas en la resolución de situaciones propias del quehacer matemático en el trabajo en equipo. - Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad. - La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde una perspectiva de género y multicultural.	El trabajo en pequeños grupos heterogéneos, de tres o cuatro estudiantes, a ser posible conformados de manera aleatoria, hace que el alumno o la alumna no se tenga que afrontar solo al problema que se plantea y se sienta más seguro al expresar sus ideas en condiciones de igualdad. No se trata de trabajar de forma cooperativa para elaborar un producto final que hay de entregar, ni de llevar a cabo roles específicos. Es cuestión de interactuar, de conversar entre iguales para discutir formas de abordar un problema, llegar a acuerdos. Cuando la cultura de aula incorpora de forma natural y cotidiana estas interacciones, las estrategias personales que pueda tener cada alumno y cada alumna de forma espontánea se ven ampliadas y enriquecidas, al mismo tiempo que obliga a utilizar un lenguaje matemático (en sentido amplio, atendiendo a sus diversos registros, desde el lenguaje oral hasta el simbólico-numérico, pasando por diagramas y esquemas) que comprendan los compañeros y las compañeras. En definitiva, hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. El profesorado debe asumir un papel fundamentalmente de guía que plantea preguntas abiertas al alumnado, preguntas ricas, que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás y a buscar recursos en el aula que necesiten para resolver el problema. También es vital dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. No es suficiente con lanzar la pregunta y acto seguido, a los pocos segundos, desvelar la respuesta. Otro aspecto a tener en cuenta por el profesorado es ser consciente del entorno individual y social del alumnado y usar ese conocimiento para conectar e integrar los contenidos a enseñar y los contextos de las tareas con los intereses reales de los estudiantes. Las matemáticas son una actividad característica de la especie humana, al igual que la literatura, el arte, la física o la música. Las matemáticas tienen un pasado, un presente y un futuro, y es importante que el alumnado sea consciente de la naturaleza viva de las matemáticas. Las matemáticas no son algo acabado, sino que, a lo largo de la historia, con la contribución de matemáticos y matemáticas del mundo se han ido construyendo las ideas matemáticas que hoy conocemos y que se encuentran en la base de todas las ciencias. Conocer la Historia de la Matemática conlleva, por una parte, entender mejor el desarrollo y motivación de conceptos e ideas en matemáticas, que en ocasiones aparecen desconectados entre sí dentro del currículo. Por otra parte, puede contribuir a cambiar la percepción del alumnado hacia la asignatura, haciéndola más cercana y coherente. Conocer su historia implica también comprender mejor el papel de las matemáticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, y les da un contexto. Por último, una perspectiva histórica nos permite abordar cuestiones como las dificultades de acceso a las matemáticas por parte de la mujer y otras minorías a lo largo de los siglos. Se puede hacer un primer acercamiento a la historia de las matemáticas procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. En este sentido, existen publicaciones que recogen diferentes secuencias didácticas para introducir la historia de las matemáticas en el aula de secundaria, como el monográfico de Barbin et al. (2018), Moyon y Tournés (2018) o la página web Convergence (https://www.maa.org/press/periodicals/convergence). También es posible encontrar otros materiales como lecturas o audiovisuales de contenido matemático, bien de ficción (“Figuras ocultas”, “El hombre que conocía el infinito”) o no ficción (podcasts, documentales, entrevistas, etc.).

III.2.5. Matemáticas B (4º ESO)

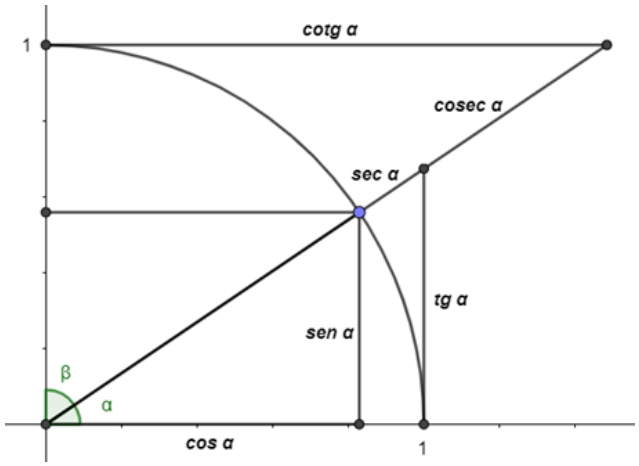
A. Sentido numérico	
El sentido numérico debe estar presente en casi en todas las situaciones que involucran conocimientos matemáticos, el alumnado que cursa matemáticas B, encontrará a lo largo de su vida académica multitud de estas situaciones en contextos relativamente complicados. Reconocer cómo y cuándo usar los números y distinguir cuándo es mejor utilizar el valor exacto y cuándo la aproximación es una de las características de un buen sentido numérico. El aprendizaje debe orientarse a desarrollar habilidades complejas y los modos de pensar matemáticos. Estos serán los cimientos de una buena base científica	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
A.1. Cantidad: - Realización de estimaciones en diversos contextos analizando y acotando el error cometido. - Expresión de cantidades mediante números reales con la precisión requerida. - Diferentes representaciones de una misma cantidad.	El uso de los números reales exige a menudo utilizar aproximaciones de ellos. El cálculo del error cometido es una herramienta muy necesaria en entornos académicos. Para comprender la cota del error cometido, se pueden utilizar applets de GeoGebra muy visuales: https://www.GeoGebra.org/m/uxcmZUKe El error relativo se asimila mucho mejor si lo trabajamos utilizando contextos reales. “No es lo mismo un error de 1 cm al medir un armario que al medir un campo de fútbol”. No siempre es fácil trabajar con la mejor representación de un número real, pero es necesario transmitir que utilizar su aproximación decimal tiene muchos inconvenientes. Recurriendo a fuentes históricas, se fomenta el gusto por este tipo de expresiones. Por ejemplo, se pide demostrar que si a=1 y los dos rectángulos son semejantes, entonces, a+b=ϕ

	 A partir de ahí, podemos conocer las peculiaridades del número áureo y encontrar su relación con la sucesión de Fibonacci, con la naturaleza y con el arte entre otras.
A.2. Sentido de las operaciones: - Operaciones con números reales en la resolución de situaciones contextualizadas. - Propiedades y relaciones inversas de las operaciones: cálculos con números reales, incluyendo con herramientas digitales.	Las operaciones aritméticas no son objetivo de este curso, sí lo es un manejo óptimo de la calculadora científica. Esto implica el uso de los diferentes modos con los que se puede trabajar: científico, radianes, cegesimal y estadístico en una o dos variables. En conexión con el sentido estocástico, se manejarán también las teclas de permutaciones (factorial), combinaciones y variaciones ordinarias y en relación con el sentido de la medida, las razones trigonométricas y sus inversas. Realizar operaciones inversas implica la necesidad del uso de radicales y logaritmos. La definición de ambos soportes debe ayudar a reconocer expresiones equivalentes y a un buen manejo de este tipo de expresiones. No se debe caer en la realización de ejercicios muy repetitivos que no contribuyen a la comprensión de las definiciones y propiedades y terminan en una mecanización excesiva. Por ejemplo, se pueden buscar parejas de números que cumplan: $$\log_{12} x + \log_{12} y = 1$$ Con pequeñas cuestiones de este tipo que admiten soluciones múltiples, se van interiorizando las propiedades de una forma más comprensiva.
A.3. Relaciones: - Los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales y reales): relaciones entre ellos y propiedades. - Orden en la recta numérica. Intervalos.	Las ampliaciones del concepto de número utilizando contextos históricos y la aparición de nuevos conjuntos por necesidades de tipo algebraico son un buen entorno para comprender las relaciones de contenido entre los diferentes conjuntos numéricos. Un buen sentido numérico, implica comprender la recta real. Su organización ordenada, los subconjuntos que podemos describir en ella (discretos o continuos, acotados superior o inferiormente, abiertos o cerrados) y su densidad, son ideas fundamentales para cursos venideros.
A.4.Razonamiento proporcional: - Situaciones de proporcionalidad directa e inversa en diferentes contextos: desarrollo y análisis de métodos para la resolución de problemas.	El estudio de situaciones en las que existe relación de proporcionalidad directa o inversa se puede abordar desde el punto de vista de la modelización, es decir, puede trabajarse dentro del sentido algebraico y computacional (D.5) y en el sentido de la medida a través de las razones trigonométricas.

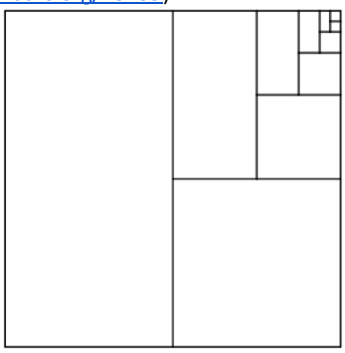
B. Sentido de la medida

El sentido de la medida nos permite comprender y comparar atributos o cualidades del mundo que nos rodea, por lo que forma parte de nuestra vida social, profesional y personal. Este sentido se caracteriza por la capacidad de contabilizar, comparar y estimar una cantidad de magnitud. En el último curso de esta etapa académica, el sentido de la medida se trabaja a través de la trigonometría y el estudio de la tasa de variación media. La trigonometría nos permite calcular ángulos y distancias de forma indirecta en puntos o lugares inaccesibles. El trabajo realizado en los cursos anteriores, donde se aborda la medida indirecta de longitudes y los criterios de semejanza entre triángulos, permite abordar el estudio de la trigonometría en este curso académico. Por otro lado, el estudio de la tasa de variación permite el trabajo de situaciones cercanas en las que intervienen distintas magnitudes.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
B.1. Medición: - Reconocimiento de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. - Razones trigonométricas de un ángulo agudo y sus relaciones: aplicación a la resolución de problemas.	La trigonometría nos permite calcular ángulos y distancias de forma indirecta en puntos o lugares inaccesibles. El trabajo realizado en los cursos anteriores, donde se aborda la medida indirecta de longitudes y los criterios de semejanza entre triángulos, permite abordar el estudio de la trigonometría en este curso académico. Dado que es un contenido nuevo para el alumnado es importante invertir tiempo en una buena asimilación de los conceptos que se van a trabajar. La trigonometría del triángulo rectángulo se puede aplicar a diferentes contextos donde entra en juego el sentido espacial y la resolución de problemas. Se puede hacer referencia a sus primeras aplicaciones en el campo de la astronomía, navegación y geodesia (Esteban, Ibañes y Ortega, 1998; Flores, 2008) y a su uso en otras ciencias como la física, la ingeniería, la arquitectura, etc. La resolución de triángulos rectángulos conocidos algunos de sus datos (algunas longitudes de lados y amplitud de ángulos) es una de las herramientas básicas en la modelización matemática de muchos de los problemas de la vida real. Entre estas situaciones reales o contextualizadas en la vida real, señalamos el cálculo indirecto de distancias inaccesibles, situaciones referidas con el cálculo de rampas y desniveles (Blanco, 2020). En la web del currículo de matemáticas de Nueva Zelanda podemos encontrar otros sugerentes contextos para la elaboración de problemas que son modelizados a través de las razones trigonométricas (https://seniorsecondary.tki.org.nz/Mathematics-and-statistics/Achievement-objectives/AOs-by-level/AO-M7-4). El sentido de la medida está relacionado con el sentido numérico en el concepto de razón, en este caso, en las razones trigonométricas. A través de la semejanza de triángulos rectángulos, se introducirán los conceptos de razones trigonométricas. Además de la semejanza de triángulos, el empleo del teorema de Pitágoras permite justificar las primeras identidades entre razones trigonométricas.

	Por otro lado, es conveniente complementar ese acercamiento con la presentación de las razones trigonométricas en el primer cuadrante de la circunferencia goniométrica o unitaria. Este contexto permite dotar de una naturaleza más dinámica a las razones trigonométricas de un ángulo y, en cursos posteriores, será clave para extender la noción de función trigonométrica a todo su dominio real y justificar así la aparición de los radianes como unidad de medida angular. También esta representación en la circunferencia unitaria permite dotar de otras interpretaciones a las razones trigonométricas presentadas (seno, coseno y tangente) y dar una interpretación geométrica a otras razones trigonométricas, como las recíprocas (secante, cosecante y cotangente) como medida de segmentos concretos o como razones trigonométricas de ángulos complementarios.  Esta variedad de representaciones e interpretaciones enriquecen conceptualmente el conocimiento de este objeto, pero para ello es necesario que el/la docente sea consciente de las posibles dificultades, errores y concepciones erróneas que pueden generarse en el alumnado debido a esta pluralidad de interpretaciones. Por ejemplo, el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo mediante el cociente de los lados de un triángulo solo se puede realizar en el caso de que ese triángulo sea rectángulo, o que identificar las razones trigonométricas de un ángulo con la longitud de un segmento, solo es posible realizarlo en la circunferencia unitaria (con radio 1). El uso de las TICs, como GeoGebra, permite que el alumnado pueda visualizar los conceptos básicos de la trigonometría. El programa permite utilizar deslizadores, cambiar datos, o mover la figura, de forma que la relación entre definición analítica y geométrica se puede ver de forma intuitiva. Al mover la figura, el alumnado también puede recoger de manera sistemática los datos numéricos asociados a cada una de estas razones, elaborar una tabla y preguntarse por el comportamiento de esas magnitudes al variar el ángulo desde 0 a 90 grados, estudiar su recorrido, continuidad, crecimiento y decrecimiento desde este registro tabular y graficarlos, sirviendo de introducción a las funciones trigonométricas en el dominio [0, 90).
B.2. Cambio: - Estudio gráfico del crecimiento y decrecimiento de funciones en contextos de la vida cotidiana con el apoyo de herramientas tecnológicas: tasas de variación absoluta, relativa y media.	Los saberes incluidos en este bloque tienen especial relación con los saberes del sentido algebraico y computacional, en especial del bloque D.5. Relaciones y funciones, por lo que se sugiere un tratamiento integrado de ambos bloques de saberes. Las simulaciones a través de programas como GeoGebra o Derive o la propia realidad cotidiana proporcionan una base intuitiva para este concepto. Por tanto, el uso de herramientas tecnológicas amplía las posibles representaciones del concepto de tasa de variación: simbólica y numérica, visual y formal. La tasa media de variación entre las abscisas a y b puede abordarse desde el modelo geométrico y cinemático, este último modelo nos permite hablar de la velocidad media entre dos instantes. En el modelo geométrico, la tasa media de variación corresponde a la pendiente de la secante a la curva en dos puntos dados (a,f(a)) y (b,f(b)). Mediante la representación gráfica de este concepto a través del modelo geométrico se introducirá, en la formación posterior, el concepto de pendiente de la tangente a una curva en un punto con el paso al límite y el concepto de función derivable. Algunas situaciones cercanas donde podemos trabajar la tasa de variación son: magnitudes en función del tiempo (consumo, producción, temperatura, precio, ocupación, etc.), relación entre dos magnitudes donde no interviene el tiempo (por ejemplo: coste-beneficio en función de la cantidad fabricada). Es interesante hacer notar que estas situaciones aparecen en contextos científicos (cinemática, movimientos ondulatorios, cinética, química, etc.) por lo que se abre una buena oportunidad para establecer conexiones interdisciplinares.
C. Sentido espacial	
Los elementos geométricos sujetos a estudio en tercero de ESO incluyen ya elementos de desarrollo de la geometría analítica y del razonamiento y modelización geométricas. En este curso se profundiza en la relación con el sentido algebraico, fundamental para cursos posteriores. Para comprenderlos mejor, el uso de herramientas informáticas como los programas de geometría dinámica son determinantes.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
C.1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones:	El libro Geometría cotidiana (Alsina, 2005) contiene numerosos ejemplos que pueden dar pie a actividades de aula en los que se muestran objetos de la vida cotidiana y cómo la Geometría ha

- Propiedades geométricas de objetos matemáticos y de la vida cotidiana: investigación con programas de geometría dinámica.	influido notablemente en su diseño, por ejemplo, el capítulo 4 trata del diseño de cajas, el 5 a la presencia de objetos de forma poliédrica en nuestras vidas…
C.2. Localización y sistemas de representación: - Figuras y objetos geométricos de dos dimensiones: representación y análisis de sus propiedades utilizando la geometría analítica. - Expresiones algebraicas de una recta: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.	Es posible ahora acercarse a los lugares geométricos anteriormente estudiados desde un punto de vista analítico. Encontrar las ecuaciones de los lugares geométricos rectos y no rectos y estudiar sus propiedades para lo que podemos ayudarnos también de GeoGebra (libro de GeoGebra de A. Penagos): https://www.GeoGebra.org/m/s8a9tt4g#material/b5mg7ws9. Arce et al. (2019) alertan de los problemas que pueden surgir en la introducción de la geometría analítica. Particularmente, es posible caer en una "algebrización" de la geometría, por ejemplo, al resolver posiciones relativas de ecuaciones de rectas mediante sistemas de ecuaciones. También se puede producir una cierta ruptura si el alumnado no percibe la geometría analítica como una herramienta para abordar problemas más complejos que los que se resuelven con la geometría sintética. Gascón (2002) propone una serie de problemas sobre construcciones con regla y compás para justificar la necesidad de introducir técnicas analíticas. Carmona y Climent (2012) presentan una actividad introductoria de tipo investigativo en la que se plantean diversas ecuaciones de la recta y se debe encontrar el significado de cada número que aparece en ellas. El conocimiento de las coordenadas y las ecuaciones de la recta se debe emplear también para conectar con otros conocimientos que se han adquirido anteriormente llegando a construir pequeñas demostraciones como que las medianas de cualquier triángulo se cortan en un punto. Se puede utilizar un argumento "sin pérdida de generalidad" para reducir el nivel de complejidad colocando convenientemente los ejes sobre un triángulo general de forma que el eje de abscisas (o el de ordenadas) coincida con un lado del triángulo. El alumnado puede determinar las ecuaciones de dos de las medianas, encontrar el punto en el que se cruzan y demostrar que la tercera mediana pasa por ese punto. Es posible que el alumnado se queje de que se demuestran cosas que ya se saben que son ciertas, ahí está la labor del profesorado distinguiendo entre el saber común y el saber matemático, fuera de toda duda.
C.3. Movimientos y transformaciones: - Transformaciones elementales en la vida cotidiana: investigación con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica, realidad aumentada…	Los movimientos y transformaciones estudiados en cursos anteriores se tratarán en este curso con herramientas analíticas, lo que no quiere decir perder de vista el sentido geométrico de los mismos y mantener la doble perspectiva analítico-sintética siempre presente para evitar la posibilidad de que la Geometría quede oculta en medio de una algebrización de la misma.
C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica: - Modelos geométricos: representación y explicación de relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas. - Modelización de elementos geométricos de la vida cotidiana con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica, realidad aumentada… - Elaboración de conjeturas sobre propiedades geométricas utilizando programas de geometría dinámica u otras herramientas.	El desarrollo del razonamiento según los Niveles de van Hiele comprende cuatro procesos: el reconocimiento, la clasificación, la definición y la demostración. Para el inicio al trabajo de la demostración, es adecuado primero realizar conjeturas sobre aquello que después se va a demostrar. Estas conjeturas se pueden llevar a cabo con ayuda de programas de geometría dinámica como GeoGebra y tratar sobre elementos trabajados en otras partes del currículo de Geometría en este curso o en los anteriores. Por ejemplo, relaciones entre el paralelismo de los lados de un polígono y la relación entre los ángulos opuestos. No obstante, ser capaz de conjeturar no es sinónimo de ser capaz de demostrar. El nivel de razonamiento más probable para el alumnado de 4º de ESO estará entre un nivel 2 y un nivel 3, lo que probablemente le permitirá seguir la demostración que haga el profesorado, pero no hacerla de forma autónoma. Gracias al uso de GeoGebra u otros programas informáticos de geometría dinámica, el alumnado puede generar y explorar rápidamente una serie de ejemplos. Si no se asientan ciertas bases sobre lo que es o no es una prueba y una argumentación matemática, podrían argumentar que una conjetura debe ser válida simplemente porque funciona en todos los ejemplos que probaron (rasgo característico del nivel 2 de van Hiele). A pesar de esa posibilidad, si el alumnado entiende el papel de la experimentación, la conjetura y la prueba, el hecho de poder generar y explorar muchos ejemplos puede dar lugar a investigaciones matemáticas más profundas y extensas de lo que sería posible de otro modo.
D. Sentido algebraico y pensamiento computacional	
Las matemáticas de este curso están orientadas a un perfil de salida más académico. Por tanto, por una parte, se deben consolidar y profundizar los conocimientos, destrezas y actitudes de los cursos anteriores. Por otra parte, conviene que el alumnado desarrolle su capacidad de manipular expresiones algebraicas de más complejidad y amplíe su experiencia con diferentes tipos de modelos y relaciones cuantitativas entre variables. Conviene también conectar este trabajo con los saberes del resto de los sentidos matemáticos, destacando el papel del álgebra como el lenguaje de las matemáticas.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
D.1. Patrones: - Patrones, pautas y regularidades: observación, generalización y término general en casos sencillos.	En este curso se puede consolidar el trabajo con progresiones aritméticas de 3º de ESO. Esto puede hacerse trabajando en situaciones contextualizadas, buscando por ejemplo enlaces con patrones numéricos o geometría. Esta actividad de nrich (https://nrich.maths.org/2292) conecta la búsqueda del término general de una progresión aritmética con la geometría. Con respecto a las progresiones geométricas, pueden introducirse a partir de la resolución de un problema, permitiendo que el alumnado obtenga de forma independiente los resultados clave. Un problema típico que puede utilizarse como introducción es el de las propinas: si la primera semana recibes 1 céntimo, la segunda semana 2 céntimos, la tercera semana 4 céntimos, etc., doblando la

	propina cada semana, ¿cuánto dinero se recibe la última semana del año? ¿cuánto dinero se ha recibido en total? A partir del estudio de una tabla de valores para las primeras semanas el alumnado suele deducir sin dificultad que la última semana se reciben 2^{51} céntimos, y la cantidad total acumulada en un año es $2^{52} - 1$. A continuación puede considerarse que sucede si se triplica la propina cada semana. En este caso los totales acumulados no corresponden a la expresión $3^n - 1$, sino a la mitad de esta cantidad. **Semana / Propina / Total** 1 / 1 / 1 2 / 2 / 3 3 / 4 / 7 4 / 8 / 15 5 / 16 / 31 6 / 32 / 63 7 / 64 / **Semana / Propina / Total** 1 / 1 / 1 2 / 3 / 4 3 / 9 / 13 4 / 27 / 40 5 / 81 / 121 6 / 243 / 364 7 / 729 / Esto sugiere que el resultado si se cuadruplican las propinas sería de $(4^n - 1)/3$, lo que puede comprobarse fácilmente (por ejemplo, utilizando una hoja de cálculo). Todo esto nos lleva a las fórmulas generales de r^{n-1} para la propina de una semana, y $(r^n - 1)/(r - 1)$ para los totales. No resulta complicado para el alumnado el observar que, si cambiamos la propina inicial por 50 céntimos, por ejemplo, esto resultará en qué todos los valores queden multiplicados por 50. Es decir, si partimos de una cantidad inicial a, se obtienen las fórmulas habituales de ar^{n-1} para el término general, y $a(r^n - 1)/(r - 1)$ para la suma de los primeros n términos. Para terminar de fijar ideas convendría aplicar las fórmulas obtenidas en otros casos contextualizados (por ejemplo, interés bancario). Posteriormente se puede hacer un desarrollo más teórico, y si se desea se puede presentar una argumentación algebraica para la fórmula de la suma de términos. En el caso de una progresión geométrica con $\|r\| < 1$, se tiene que r^n tiende a cero y la suma de los infinitos términos es finita. Este fenómeno se puede explorar a través de una hoja de cálculo, y como ejemplo concreto pueden utilizarse modelos geométricos como el siguiente (pueden encontrarse más ejemplos en https://nrich.maths.org/13759).  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \cdots = 1$
D.2. Modelo matemático: - Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones. - Estrategias de deducción y análisis de conclusiones razonables de una situación de la vida cotidiana a partir de un modelo.	En los cursos anteriores se han trabajado con cierta profundidad los modelos lineales y cuadráticos, y se han introducido el modelo exponencial y el de proporcionalidad inversa. Durante este curso se puede consolidar este trabajo, incluyendo el estudio de situaciones en las que aparezcan dichos modelos. Pueden introducirse adicionalmente el modelo logarítmico y algún modelo correspondiente a funciones polinómicas sencillas, como la cúbica. La resolución de problemas elementales de optimización ofrece un contexto significativo en el que el uso de un modelo cúbico o racional nos permite localizar un extremo de forma experimental. Un ejemplo clásico (que aparece en Calvo et al. (2016, p. 197)) es el siguiente: "Tenemos una hoja de papel de forma cuadrada de 20 cm de lado. En cada una de las esquinas eliminamos un cuadrado pequeño, igual para cada vértice, de modo que el papel resultante nos permita formar una caja sin tapa. ¿Cuál deberá ser el lado del cuadrado pequeño si queremos que la caja tenga el mayor volumen posible? ¿Cuál será el volumen máximo?" A partir de una tabla de valores se pueden encontrar resultados aproximados. La representación gráfica de la correspondiente expresión cúbica para el volumen, tanto a partir de valores numéricos, como de la correspondiente expresión algebraica, $V = x(20 - x)^2$, permitirá ajustar el resultado y argumentar sobre la validez del mismo. Otro ejemplo clásico sobre el diseño de una lata con un volumen fijo y buscando ahora la superficie mínima, del que se puede encontrar una descripción detallada en el libro del Shell Centre for Mathematical Education (1990), permite explorar un modelo algo más complejo en el que interviene una función racional.
D.3. Variable:	El uso de tablas, representaciones gráficas y expresiones simbólicas en el estudio y modelización de

- Variables: asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema y diferentes usos. - Relaciones entre cantidades y sus tasas de cambio.	situaciones en distintos contextos contribuye al desarrollo de una comprensión de los diferentes usos de las variables. En las situaciones descritas anteriormente el alumnado utiliza gráficos, tablas y expresiones algebraicas para analizar la naturaleza de los cambios en las cantidades en relaciones lineales, cuadráticas, cúbicas, exponenciales y de proporcionalidad inversa.
D.4. Igualdad y desigualdad: - Álgebra simbólica: representación de relaciones funcionales en contextos diversos. - Formas equivalentes de expresiones algebraicas en la resolución de ecuaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales y no lineales sencillas. - Estrategias de discusión y búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales y no lineales sencillas en situaciones de la vida cotidiana. - Ecuaciones, sistemas e inecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología.	En los cursos anteriores se han trabajado las expresiones y ecuaciones lineales y cuadráticas. En este curso se puede extender este trabajo al estudio de expresiones polinómicas y racionales sencillas, y a la resolución de ecuaciones con este tipo de expresiones. Ambos tipos de expresiones pueden comenzar a estudiarse en relación con situaciones como las comentadas en el apartado D.3. Antes de comenzar a trabajar más formalmente la resolución de ecuaciones polinómicas en una variable puede ser interesante que el alumnado conozca la historia de la resolución de este tipo de ecuaciones (pueden investigar el papel de los matemáticos árabes, y de Cardano y Tartaglia posteriormente para la cúbica y la cuártica, por ejemplo, o sobre Galois y de Abel, y su relación con la demostración de que a partir de grado 5 no es posible obtener una fórmula general para la resolución de ecuaciones). A la hora de resolver ecuaciones por factorización vale la pena recordar que no es estrictamente necesario realizar una división de polinomios (sea por Ruffini o división de caja). Por ejemplo, dada la ecuación $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, una vez establecido que $(x + 3)$ es un factor del correspondiente polinomio utilizando el Teorema del Factor, puede obtenerse el factor $(x^2 + x - 2)$ observando que $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + 3)(x^2 + ax + b)$ y determinando los coeficientes a y b a partir de esta última ecuación. Como en cursos anteriores con las ecuaciones de segundo grado, puede ser interesante el trabajo en paralelo de la resolución por factorización y el estudio de la representación gráfica de la curva correspondiente. En la unidad A11 de la publicación "Standards Unit: Improving Learning in Mathematics" (disponible en la web de la Universidad de Nottingham http://wirksworthii.nottingham.ac.uk/Improv_Learning_Maths/screens/math_004_001_005/page.html o en la web https://www.stem.org.uk/elibrary/collection/2933), se puede encontrar una propuesta interesante para trabajar la factorización de funciones cúbicas en la que se plantea una introducción a los Teoremas del Resto y del Factor. Un trabajo de comparación entre varios modelos lineales, como por ejemplo en este problema de nrich, https://nrich.maths.org/7342, en el que se comparan los precios de varios aparcamientos, puede ser un buen punto de partida para plantear la resolución algebraica de inecuaciones lineales. Este tipo de problema ofrece un contexto para comparar los resultados obtenidos en la resolución algebraica con los resultados obtenidos a partir de tablas, descripciones de características de las funciones implicadas y su representación gráfica. El uso de rectas numéricas para representar desigualdades del tipo $x>3$, $x<-2$, etc., pueden ayudar a la comprensión de estas expresiones. La introducción de inecuaciones a partir de la resolución de un problema (por ejemplo: "Dado que un ascensor tiene una masa de 800 kg y el cable que lo sostiene tolera hasta 1400 kg de peso, ¿cuántas personas pueden viajar en el ascensor de manera segura?") facilitará el que este tipo de expresiones tengan sentido para el alumnado. La representación gráfica de expresiones con dos variables nos permite, por una parte, dar un significado a una inecuación lineal de dos variables, como por ejemplo $2x + y < 6$: la recta $2x + y = 6$ es el límite entre dos regiones del plano cuyos puntos cumplen dos condiciones distintas (o bien $2x + y < 6$ o bien $2x + y > 6$). Por otra parte, dada una inecuación lineal como $3x - 2 > 0$, se puede identificar como solución el intervalo del eje de abscisas para el cual la recta $y = 3x - 2$ queda por encima del eje horizontal. Este último tipo de actividad puede realizarse también con inecuaciones de segundo grado, donde las soluciones pueden ser dos intervalos infinitos o un intervalo finito dependiendo del signo de desigualdad. En este contexto se pueden proponer al alumnado actividades en las que deba plantear inecuaciones cuyas soluciones cumplan unas determinadas condiciones. Por ejemplo, encontrar tres inecuaciones tales que la región del plano que determinan contenga únicamente tres puntos con coordenadas enteras (una posible solución sería $x >0$, $y>0$, $x+y< 4$).
D.5. Relaciones y funciones: - Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y las clases de funciones que las modelizan. - Relaciones lineales y no lineales: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas. - Representación de funciones: interpretación de sus propiedades en situaciones de la vida cotidiana y otros contextos.	El estudio de funciones en este curso debe considerarse en relación al trabajo de modelización comentado en el apartado D.2. Se sugiere también que el trabajo con los bloques de saberes B.1. y B.2. del sentido de la medida se realice de forma conjunta con este bloque y el bloque D.2. de modelización, puesto que tanto el estudio de crecimiento y decrecimiento de funciones como el concepto de tasa de variación van a aparecer en conexión al estudio de funciones y modelos. Las funciones lineales y cuadráticas se habrían trabajado con cierta profundidad en el curso anterior, por lo tanto, en este curso se puede concentrar la atención en las características de la función exponencial, la función de proporcionalidad inversa y otras funciones racionales sencillas, y alguna función polinómica. En este curso debe realizarse un estudio más sistemático de las características de las funciones exponenciales $y = a^x$, para $a>1$ y $a<1$. Este estudio puede iniciarse a partir de los ejemplos planteados en el apartado D.1. en relación a las progresiones geométricas. El uso de herramientas tecnológicas será de gran ayuda para explorar el efecto del parámetro a en la función y su representación gráfica. De la misma forma, se puede comenzar un estudio más detallado de la función de proporcionalidad inversa, así como de funciones racionales sencillas, como por ejemplo del tipo $y = (ax + b)/(cx + d)$. Con respecto a las funciones polinómicas, se puede motivar el estudio de la cúbica a partir de algún ejemplo como el detallado en el apartado D.2. Las características de su representación gráfica deberían ponerse en relación con la resolución por factorización de ecuaciones de grado 3, tal y como

	se proponía para las ecuaciones cuadráticas en cursos anteriores. En la página web de nrich se proponen también algunas actividades para trabajar las funciones cúbicas con el apoyo de GeoGebra, Desmos o algún otro tipo de calculadora gráfica (https://nrich.maths.org/802). Ahora que el alumnado ha experimentado y trabajado con diversos tipos de funciones, pueden introducirse los términos con los que se describen ciertas características generales de las funciones, como crecimiento, extremo, continuidad, concavidad, asíntotas o dominio y recorrido. Con respecto al dominio y recorrido convendría reflexionar sobre casos concretos, evitando el cálculo mecánico para funciones con las que el alumnado no tiene ninguna experiencia. Esto puede hacerse planteando preguntas como: ¿Qué valores puede tomar, y cuáles no, la variable independiente? ¿Qué valores puede tomar la función, o variable dependiente? ¿Cómo nos ayuda la gráfica de la función a determinar esta respuesta? El trabajo con funciones periódicas puede servir para completar el estudio de algunas de las nociones anteriores (la función crece y decrece a intervalos regulares, y cambia su concavidad).
D.6. Pensamiento computacional: - Resolución de problemas mediante la descomposición en partes, la automatización y el pensamiento algorítmico. - Estrategias en la interpretación, modificación y creación de algoritmos. - Formulación y análisis de problemas de la vida cotidiana mediante programas y otras herramientas.	El pensamiento computacional se trabaja de forma más o menos directa en todos los saberes. En las orientaciones del resto de sentidos encontramos situaciones en las que se trabajan estrategias asociadas a la interpretación, modificación y creación de algoritmos, y la resolución de problemas. Por ejemplo: la resolución de problemas trigonométricos en el sentido de la medida o el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas de geometría analítica en el sentido espacial. Con respecto al sentido algebraico, ya se ha comentado que su desarrollo implica trabajar el pensamiento computacional. Esto es así puesto que las habilidades del pensamiento computacional incluyen el reconocimiento de patrones, el diseño y uso de abstracciones, la descomposición de patrones, la determinación de qué herramientas son adecuadas para analizar o solucionar un problema y definir algoritmos como parte de una solución. La propuesta de situaciones que pueden ser analizadas mediante programas u otras herramientas tecnológicas se plantea también en las orientaciones del resto de sentidos. Dentro del sentido algebraico durante este curso el trabajo con modelos y relaciones resultará mucho más completo y rico si se complementa con herramientas como hojas de cálculo, GeoGebra, calculadoras gráficas, etc., que el alumnado habría utilizado ya durante cursos anteriores.
E. Sentido estocástico	
Los elementos del sentido estocástico sujetos a estudio en cuarto de ESO incluyen la introducción de técnicas básicas para la selección de muestras, así como la enseñanza de la correlación con la vista puesta en la superación de los problemas conceptuales que acarrea, así como la introducción y diferenciación entre los conceptos de condicionalidad y causalidad.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
E.1. Organización y análisis de datos: - Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucren una variable bidimensional. Tablas de contingencia. - Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de una y dos variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales. - Medidas de localización y dispersión: interpretación y análisis de la variabilidad. - Gráficos estadísticos de una y dos variables: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...), análisis, interpretación y obtención de conclusiones razonadas. - Interpretación de la relación entre dos variables, valorando gráficamente con herramientas tecnológicas la pertinencia de realizar una regresión lineal. Ajuste lineal con herramientas tecnológicas.	Se propone en este curso la introducción de técnicas básicas para la selección de muestras para los estudios estadísticos como el muestreo aleatorio simple y el muestreo estratificado. En las guías Praxis (Borrell et al., 1999) se ofrece una secuencia de enseñanza completa sobre muestreo muy interesante que lleva por título “muestras” y que incluye actividades sobre estos dos tipos de muestreo. Las monografías de Edumat dirigidas y editadas por J.D. Godino son accesibles en http://www.ugr.es/local/jgodino/. Estos materiales también contienen orientaciones específicas, tanto para la distribución e inferencia como para la predictibilidad e incertidumbre.
E.2. Incertidumbre: - Experimentos compuestos: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada. - Probabilidad: cálculo aplicando la regla de Laplace y técnicas de recuento en experimentos simples y compuestos (mediante diagramas de	Es frecuente que el alumnado confunda condicionalidad con causalidad. Se propone introducir la idea de probabilidad condicionada con problemas como ¿quién se ha comido mis deberes? (https://nrich.maths.org/9525) y ¿quién miente? (https://nrich.maths.org/9840) que proponen una primera toma de contacto experimental con el concepto previa a la formalización del mismo. Se aconseja el empleo de distintas representaciones que faciliten la organización del recuento de los casos y clasificar sucesos en experimentos simples y compuestos como tablas de contingencia o diagramas de Venn. En este sentido, los diagramas de árboltambién son unas representaciones útilesque permiten representar la estructura de muchos problemas combinatorios y probabilísticos, facilitando su resolución (de Hierro et al., 2018) y que aparece en otros sentidos, como el numérico.

árbol, tablas…) y aplicación a la toma de decisiones fundamentadas.	También el problema de Monty Hall, explicado en Batanero et al. (2009) y cuya simulación podemos ver en https://www.mathwarehouse.com/monty-hall-simulation-online/ puede resultar una introducción interesante para ver la utilidad de la probabilidad condicionada y el manejo del significado subjetivo o Bayesiano de la probabilidad, accesible a este nivel en su interpretaciones intuitiva y experimental. En el contexto de la resolución de problemas, es adecuado incrementar el nivel formal incluyendo el álgebra de sucesos, si bien esta no debe ser un objeto separado de estudio ya que la formalización debe estar al servicio de la resolución de problemas.
E.3. Inferencia: - Diferentes etapas del diseño de estudios estadísticos. - Estrategias y herramientas de presentación e interpretación de datos relevantes en investigaciones estadísticas mediante herramientas digitales adecuadas. - Análisis del alcance de las conclusiones de un estudio estadístico valorando la representatividad de la muestra.	La enseñanza de la correlación debe superar los problemas detectados por Castro-Sotos et al. (2009) y Engel y Sedlmeier (2011) como la influencia de creencias previas, desestimar el efecto de la regresión, no tener en cuenta el efecto de terceras variables, identificar correlación y causalidad, la falta de apreciación de la correlación negativa e interpretar de forma determinista o funcional la correlación. Batanero y Godino (2001) añaden que "también se han observado dificultades al estimar el coeficiente de correlación desde otras representaciones (verbal tabular, etc.) distintas de la representación gráfica (diagrama de dispersión)." Proponen destacar la importancia del trabajo con distintas representaciones de la asociación estadística (verbal, tabular, gráfica, o numérica). Los mismos autores apuntan que el alumnado muestra dificultad a la hora de diferenciar la variable explicativa de la explicada en el cálculo de la recta de regresión. La paradoja de Simpson se produce cuando se descuida una tercera variable explicativa que provoca la inversión de una asociación. Hay numerosos ejemplos de esta paradoja como el explicado detalladamente en Contreras et al. (2012). Es importante no dar por buena una correlación simplemente por los datos numéricos sin analizar la situación en global y la presencia de terceras variables. El trabajo con la paradoja de Simpson puede servir para aumentar la precaución del alumnado ante la interpretación precipitada de la correlación como causalidad. Se proponen actividades como la siguiente para entender cómo varía la correlación entre dos variables según vamos añadiendo datos y estos se ajustan más o menos a la línea de regresión: http://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_5_correg.html. Lo aprendido sobre muestreo permitirá enriquecer estudios estadísticos en dos variables causa-efecto: tabaquismo-cáncer, por ejemplo. Batanero y Díaz (2011) proponen varios proyectos que pueden ser llevados al aula directamente o previa adaptación a las circunstancias y niveles del alumnado de que se trate, por ejemplo, el proyecto "Estadísticas de la pobreza y la desigualdad" podría ser fácilmente adaptado a este curso.

F. Sentido socioafectivo

El sentido socioafectivo está muy relacionado con la Competencia Personal, Social, y de Aprender a Aprender (CPSAA). El desarrollo de esta competencia implica, por una parte, plantear situaciones en las que el alumnado tenga la oportunidad de reflexionar sobre sí mismo, sus actitudes y sobre cómo se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, se debe atender también al desarrollo de las destrezas sociales, el trabajo en equipo y la creación de relaciones saludables. Dentro de las matemáticas la resolución de problemas es un elemento central, en el que de forma natural el alumnado se va a encontrar situaciones en las que deba enfrentarse a un reto, hacer frente a la incertidumbre, gestionar su estado emocional ante las dificultades y desarrollar actitudes de perseverancia y resiliencia. Para propiciar el trabajo efectivo en estos aspectos es necesario establecer un clima en el aula en el que se favorezcan el diálogo y la reflexión, se fomente la colaboración y el trabajo en equipo, y se valoren los errores y experiencias propias y de los demás como fuente de aprendizaje.

Otro elemento integral del sentido socioafectivo en las matemáticas es promover la erradicación de ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato. Con este objetivo se propone, por ejemplo, el uso de actividades que den lugar a un aprendizaje inclusivo (por ejemplo, tareas ricas o actividades de "suelo bajo y techo alto"). Por otra parte, hay que incluir oportunidades para que el alumnado conozca las contribuciones de las mujeres, así como de distintas culturas y minorías, a las matemáticas, a lo largo de la historia y en la actualidad.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
F.1. Creencias, actitudes y emociones: - Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación. - Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas. - Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.	La resolución de un problema significa comprometerse con la solución de una tarea para la que no se conoce previamente el método de solución. Al abordar los problemas, el alumnado tiene que razonar matemáticamente, emplear sus conocimientos matemáticos y en ocasiones, adquirir nociones matemáticas nuevas. La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas lleva aparejado el desarrollo de actitudes básicas para el trabajo matemático: perseverancia, flexibilidad, estrategias personales de autocorrección y de superación de bloqueos, confianza en las propias posibilidades, iniciativa personal, curiosidad y disposición positiva a la reflexión sobre las decisiones tomadas y a la crítica razonada, planteamiento de preguntas y búsqueda de la mejor respuesta, aplicando lo aprendido en otras situaciones y en distintos contextos, interés por la participación activa y responsable en el trabajo en pequeño y gran grupo. Para ello, no se trata, por tanto, de que el alumnado reciba instrucción directa sobre educación emocional, ni sobre los componentes de la dimensión afectiva en matemáticas (valores, creencias, actitudes y emociones) y sus diferencias, sino que en la práctica diaria de clase diseñada por el profesorado ponga en juego distintas estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo como favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos

	matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas; revisar los pasos seguidos en la resolución de una tarea para plantearse si hay errores o si lo obtenido puede emplearse en otras situaciones; revisar las distintas resoluciones obtenidas, enfatizando en que no hay una única manera de resolver un problema; identificar en las tareas cuáles son los aspectos clave para su resolución y prever qué tipo de andamiaje ofrecer al alumnado en caso de bloqueo, etc.
F.2. Trabajo en equipo y toma de decisiones: - Asunción de responsabilidades y participación activa para optimizar el trabajo en equipo. - Disposición a pedir, dar y gestionar ayuda para la gestión de conflictos. - Reflexión sobre las ideas clave de situaciones problemáticas para ser capaz de tomar decisiones adecuadas en situaciones similares.	El trabajo en pequeños grupos heterogéneos, de tres o cuatro estudiantes, a ser posible conformados de manera aleatoria, hace que el alumno o la alumna no se tenga que afrontar solo al problema que se plantea y se sienta más seguro al expresar sus ideas en condiciones de igualdad. No se trata de trabajar de forma cooperativa para elaborar un producto final que hay de entregar, ni de llevar a cabo roles específicos. Es cuestión de interactuar, de conversar entre iguales para discutir formas de abordar un problema, llegar a acuerdos. Cuando la cultura de aula incorpora de forma natural y cotidiana estas interacciones, las estrategias personales que pueda tener cada alumno y cada alumna de forma espontánea se ven ampliadas y enriquecidas, al mismo tiempo que obliga a utilizar un lenguaje matemático (en sentido amplio, atendiendo a sus diversos registros, desde el lenguaje oral hasta el simbólico-numérico, pasando por diagramas y esquemas) que comprendan los compañeros y compañeras. En definitiva, hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. El profesorado debe asumir un papel fundamentalmente de guía que plantea preguntas abiertas al alumnado, preguntas ricas, que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás y a buscar recursos en el aula que necesiten para resolver el problema. También es vital dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. No es suficiente con lanzar la pregunta y acto seguido, a los pocos segundos, desvelar la respuesta. Otro aspecto a tener en cuenta por el profesorado es ser consciente del entorno individual y social del alumnado y usar ese conocimiento para conectar e integrar los contenidos a enseñar y los contextos de las tareas con los intereses reales de los estudiantes. Las matemáticas son una actividad característica de la especie humana, al igual que la literatura, el arte, la física o la música. Las matemáticas tienen un pasado, un presente y un futuro, y es importante que el alumnado sea consciente de la naturaleza viva de las matemáticas. Las matemáticas no son algo acabado, sino que, a lo largo de la historia, con la contribución de matemáticos y matemáticas del mundo se han ido construyendo las ideas matemáticas que hoy conocemos y que se encuentran en la base de todas las ciencias. Conocer la Historia de la Matemática conlleva, por una parte, entender mejor el desarrollo y motivación de conceptos e ideas en matemáticas, que en ocasiones aparecen desconectados entre sí dentro del currículo. Por otra parte, puede contribuir a cambiar la percepción del alumnado hacia la asignatura, haciéndola más cercana y coherente. Conocer su historia implica también comprender mejor el papel de las matemáticas en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, y les da un contexto. Por último, una perspectiva histórica nos permite abordar cuestiones como las dificultades de acceso a las matemáticas por parte de la mujer y otras minorías a lo largo de los siglos. Se puede hacer un primer acercamiento a la historia de las matemáticas procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. En este sentido, existen publicaciones que recogen diferentes secuencias didácticas para introducir la historia de las matemáticas en el aula de secundaria, como el monográfico de Barbin et al. (2018), Moyon y Tournés (2018) o la página web Convergence (https://www.maa.org/press/periodicals/convergence). También es posible encontrar otros materiales como lecturas o audiovisuales de contenido matemático, bien de ficción (“Figuras ocultas”, “El hombre que conocía el infinito”) o no ficción (podcasts, documentales, entrevistas, etc.).

IV. Orientaciones didácticas y metodológicas

IV.1. Sugerencias didácticas y metodológicas

La consecución de las diferentes dimensiones de la competencia matemática tiene como finalidad que el individuo sea capaz de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas presentes en los contextos de la vida real. Sin embargo, la resolución de problemas no es únicamente un objetivo de las matemáticas, sino que se identifica también como un enfoque metodológico para el aprendizaje de las mismas. Este tipo de tareas exigen comprensión y autorregulación del propio proceso cognitivo, puesto que el alumnado debe analizar las diferentes estrategias o caminos de resolución, lo que implica la toma de decisión y, por tanto, se favorece la autonomía del alumnado. Un enfoque próximo a la resolución de problemas centra el interés en el proceso y no en el resultado. Este hecho exige una reflexión sobre la visión acerca del error, donde se concibe como parte fundamental del proceso de aprendizaje. En dicho proceso, el alumnado deberá poner en juego capacidades matemáticas como modelizar, interpretar resultados, formularconjeturas, argumentar y razonar inductiva y deductivamente, utilizar de

diferentes representaciones, comunicar los resultados, y establecer conexiones entre diferentes saberes matemáticos y con saberes de otras disciplinas.

Además, la resolución de problemas proporciona oportunidades al/a la docente para dar respuesta a la dimensión afectiva. El objetivo en el aula de matemática no es la inhibición de las emociones, tales como la frustración, sino dar oportunidades a través de la resolución de problemas de, en primer lugar, identificarlas y, en segundo lugar, de proporcionar herramientas para su gestión. Por tanto, la resolución de problemas resulta un escenario idóneo para dar respuesta a la competencia socioafectiva. En relación con el papel del/de la docente, este enfoque se desliga de las orientaciones tradicionales en las que el/la docente actúa como mero transmisor de conocimientos, adquiriendo un rol de guía en el proceso de aprendizaje del alumnado.

Un aspecto importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son los recursos. En cuanto a la enseñanza de las matemáticas, Arce et al. (2019) distinguen entre recursos físicos (libros de texto, cuaderno del alumnado, pizarra, materiales manipulativos, lecturas de contenido matemático y prensa), recursos digitales (pizarra digital interactiva, software informático matemático específico, apps educativas, blogs, recursos audiovisuales como cine, películas, series, vídeos…) y recursos transversales (juegos matemáticos, historia de la matemática como recurso didáctico, el propio entorno y los paseos matemáticos…).

La programación didáctica surge atendiendo al currículo y sus orientaciones y debería ser susceptible de adaptación según el progreso del alumnado. El libro de texto es un recurso empleado por un gran número de docentes y estudiantes en la práctica educativa. La utilización de este recurso puede ser diversa: como manual de consulta para el alumnado, como repositorio de ejercicios y problemas, como guion para el profesorado en sus clases, etc. No obstante, un empleo excesivo de este recurso puede conllevar la no consideración de las directrices curriculares. Por un lado, seguir linealmente una estructura habitual de los textos donde se presentan en primer lugar los saberes matemáticos (conceptuales y/o procedimentales) seguidos de ejemplos resueltos y una serie de ejercicios para complementar el trabajo de la técnica presentada justo anteriormente está lejos de situar la resolución de problemas como eje vertebrador de las matemáticas escolares y detonante de la construcción de los objetos matemáticos. Por otro, el formato escrito de los textos puede presentar carencias en cuanto al uso de otros materiales manipulativos o recursos anteriormente citados. Es recomendable recurrir a los materiales manipulativos puesto que permite al profesorado generar ambientes donde tenga lugar la resolución de problemas que, además, es una forma de trabajo que enlaza con las sugerencias didácticas en Ed. Primaria. Por tanto, se acompaña al alumnado en su proceso de aprendizaje al dar continuidad al modo en que se trabajaba en los cursos anteriores a esta etapa, aunque es necesario reflexionar sobre la pertinencia de introducir un material manipulativo en el aula para no desviar la atención y que quede desdibujada la finalidad de su introducción. El cuaderno del estudiante es un recurso relevante y natural en el aula de matemáticas del que no se suele aprovechar todo su potencial (Arce, 2018). Puede tener utilidad para llevar a cabo una evaluación formativa ya que en él se pueden recoger evidencias de aprendizaje del alumnado y observar cómo este refleja los procesos de pensamiento y su evolución a lo largo del tiempo. Además, también se sugieren emplear lecturas con contenidos matemáticos, que pueden comprender desde fragmentos de libros de divulgación matemática, novelas de contenido matemático o artículos de prensa que ponen en relieve la cantidad de información expresada en lenguaje matemático que la ciudadanía y, por tanto, el alumnado, tiene que interpretar y mostrar una actitud crítica hacia la misma.

Adicionalmente, los recursos digitales tienen que promover la posibilidad de analizar, experimentar y comprobar la información, o ser usados como instrumentos de cálculo. Existen recursos en los que nos podemos apoyar como la pizarra digital, la calculadora o el software específico (como GeoGebra, Derive, hojas de cálculo, BlocksCAD, Scratch…). También resulta interesante identificar páginas web, como las citadas a lo largo de las orientaciones para la enseñanza,que poseen diferentes actividades para llevar al aula (https://nrich.maths.org/, https://illuminations.nctm.org/, https://nzmaths.co.nz/, https://www.geogebra.org/materials, http://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_5_correg.html, entre muchas otras…). En la actualidad existen redes sociales, como Youtube o Instagram, en las que hay múltiples canales devideos de corta duración en los que se presentan ciertossaberes de matemática escolar o propios de divulgación matemática. Estos recursos, especialmente los de canales con finalidad divulgativa y de calidad contrastada, pueden proporcionar una manera atractiva e interesante de introducir y contextualizaren la sociedad y en la ciencia los contenidos matemáticos que se abordan en clase, complementando el trabajo realizado en el aula y facilitando realizar conexiones con otras materias

o con otros saberes matemáticos. No obstante, el profesorado debeser muy cuidadoso en la elección de los mismos, ya quemuchosvideos de matemáticas escolares poseen argumentos poco precisos o presentan procedimientos incorrectos (Beltrán-Pellicer et al., 2018) o no suponen añaden valor más allá de cambiar la tiza por una pizarra digital. En cualquier caso, el uso de los recursos digitales tiene que integrarse de forma natural en el aula, suponiendo su inclusión una oportunidad de mejora para el proceso de instrucción.

Otro aspecto al que debe responder el enfoque metodológico es la atención a la diversidad desde una manera inclusiva. Por tanto, es necesario reflexionar sobre un diseño de secuencias didácticas que se comprometan en atender los distintos ritmos de aprendizaje que conviven en el aula de una manera más natural. En este sentido, habría que evitar las prácticas que se reducen en la elaboración de fichas donde se trabaje la técnica o procedimientos explicados para el alumnado que no sigue el "nivel" alcanzado. Así como tampoco debería darse respuesta a esa inclusión a través de tareas más difíciles que difiere de lo trabajado en el aula. En este sentido, las tareas que se denominan de suelo bajo y umbral alto se caracterizan porque se inician desde un punto de partida asequible, donde el progreso depende del desarrollo personal de cada estudiante. Además, el trabajo en equipo permite a través de la sociabilización enriquecer y dar respuesta a las dificultades personales a través de la puesta en común y reflexión sobre las diferentes estrategias. Asimismo, se puede atender las diferencias individuales con apoyos o facilitadores del aprendizaje como los materiales manipulativos. Lilijedahl (2021) señala la generación de estos grupos de manera aleatoria para evitar la preconcepción de que el alumnado adopte la idea de que no se va a pensar. El uso de agrupaciones aleatorias no solamente derriba las barreras sociales, sino que también aumenta la movilidad del conocimiento. En relación con la dimensión afectiva, se identifican consecuencias positivas al reducir el estrés y aumentar el entusiasmo por las matemáticas. El trabajo en grupo debe garantizar la puesta en común de ideas donde se compartan los significados personales construidos y estrategias diseñadas. Por tanto, el interés recae en la interacción como medio para construir conocimiento matemático situando el foco en el proceso y no en el producto final.

Desde la administración educativa y otras instituciones u organizaciones, se promueven actividades que alimentan la curiosidad del alumnado, tanto del que participa en ella como el que vive en el entorno de aula, donde se pueden dar a conocer estas propuestas y pueden formar parte de las secuencias didácticas. En Aragón, cabe mencionar el programa educativo Conexión Matemática organizado a raíz del convenio de colaboración entre el Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón y la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas (SAPM). Otras actividades de popularización y divulgación de las matemáticas con una finalidad educativa y en las que pueden participar los estudiantes de Secundaria de manera activa, se organizan en torno a días señalados como el "Día escolar de las matemáticas" (12 de mayo) o el "Día internacional de las matemáticas" (14 de marzo). Estas actividades deben ser propuestas para todo el alumnado. No obstante, también pueden suponer un estímulo valioso en el caso de alumnado con altas capacidades. En este sentido, también existen concursos matemáticos, como las Olimpiadas de Matemáticas organizadas por las sociedades de profesorado de matemáticas, o actividades como el Taller de Talento Matemático, organizado por un grupo de profesores y profesoras tanto de enseñanza secundaria como de la Universidad de Zaragoza. Otras actividades como concursos de microrrelatos o de fotografía matemáticos ofrecen oportunidades de conexión con otras áreas. Finalmente, para apreciar las matemáticas desde un punto de vista cultural, se sugiere la realización de "paseos matemáticos" y también es interesante mencionar las exposiciones del Museo de Matemáticas en Aragón.

IV.2. Evaluación de aprendizajes

En primer lugar, las orientaciones metodológicas descritas promueven como actividad principal la resolución de problemas, acompañado de un clima participativo y abierto que permita al alumnado poner en común y valorar las estrategias de sus compañeros y compañeras. Bajo este prisma, la evaluación formativa da respuesta al enfoque metodológico sugerido, puesto que persigue apoyar el aprendizaje del alumnado proporcionando al docente o la docente evidencias para diseñar, implementar y adaptar secuencias didácticas. Si reducimos la evaluación a la obtención de una calificación donde el interés queda reducido a emitir un valor numérico exclusivamente a través de pruebas individuales cerradas, entonces se puede caer en la penalización del propio proceso.

En segundo lugar, atendiendo a la normativa, la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado será continua, formativa e integradora. Arce et al. (2019) señalan que la evaluación formativa adquiere un carácter interactivo y está integrada en el proceso de instrucción. Este enfoque supera consideraciones previas de este tipo de evaluación

supeditadas a la realización de cuestionarios o exámenes parciales a lo largo de un curso y en momentos puntuales de evaluación. Esta evaluación formativa denominada evaluar para tiene como finalidad que el estudiante participe activamente en el proceso de aprendizaje y se responsabilice del mismo. Este tipo de evaluación conlleva cambios significativos en los resultados obtenidos por el alumnado. Como este tipo de evaluación se sitúa perfectamente alineada con la metodología considerada, no es de extrañar que una actividad sea establecer un diálogo efectivo en el que profesorado se sitúe como guía de aprendizaje. El enriquecimiento de los procesos a través de las intervenciones de los compañeros y las compañeras tanto en pequeños grupos como con el grupo completo conlleva que este rol también se vea adoptado por el alumnado. Otro aspecto relevante de este enfoque es la comunicación efectiva y clara sobre los objetivos y los criterios de evaluación, así como de la situación del alumnado a lo largo del proceso de aprendizaje en relación con éstos. Al concebir el aprendizaje como un proceso y no como un resultado, el/la docente tiene que dar respuesta a las diferentes dificultades en el aprendizaje con la finalidad de superarlas.

Bajo este enfoque de evaluación, tiene una mención especial tanto la autoevaluación como la evaluación por pares, pues resultan actividades fundamentales de la evaluación formativa (Arce et al., 2019). Estas actividades fomentan la reflexión del alumnado sobre su propio aprendizaje. Para alcanzarlo, un aspecto fundamental es que los objetivos de aprendizaje sean conocidos por el alumnado. En el caso de la evaluación por pares, Giménez (1996) indica que es recomendable utilizar plantillas donde se incluyan los objetivos y criterio de evaluación y se asigne a cada uno de ellos una valoración codificada como acierto (B), error (E), identificación parcial (P) o sin respuesta y dejar un espacio para que el alumnado incluya observaciones o comentarios sobre sus valoraciones. Por su parte, la autoevaluación tiene que ayudar al alumnado a ser consciente de su proceso de aprendizaje dando lugar a la posibilidad de que emerjan las dificultades de una manera consciente y exista la posibilidad de dar respuesta a las mismas. De esta manera, se favorece la autorregulación del alumnado, así como su autonomía. Como posibles ideas, Boaler (2016) presenta algunos ejemplos de tareas de autoevaluación que facilitan dicha regulación de los aprendizajes: (a) tareas abiertas que invitan a la reflexión sobre las ideas que han aprendido y nombrar los aspectos más difíciles, (b) actividades más cerradas en las que se presentan en una tabla la lista de objetivos para que se identifiquen los que han sido alcanzados. En definitiva, se trata de planificar la recogida de evidencias de aprendizaje que permita al docente o la docente tener información sobre el estado en el que se sitúa cada alumno y alumna en lugar de un cuaderno de puntuaciones.

Finalmente, se debe dar la importancia requerida a la evaluación inicial y de diagnóstico, que permite al profesorado ajustar la planificación de las tareas a la diversidad del aula e identificar posibles dificultades que podrían surgir durante el proceso de enseñanza. En este sentido, puede ser interesante la formulación de preguntas en el aula o tareas concretas que aporten información al profesorado de una manera sencilla y aproximada sobre el conocimiento previo que necesita para abordar el proceso de enseñanza planificado.

IV.3. Diseño de situaciones de aprendizaje

Un punto de partida interesante para reflexionar sobre el diseño de situaciones de aprendizaje es describir un proceso que ayude o guíe al profesorado a tomar decisiones durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, se definen una serie de fases que pueden ser susceptibles de ser adaptadas a las necesidades identificadas, pero que sirven para caracterizar una fotografía general del desarrollo del proceso. En el siguiente apartado, junto con la descripción de situaciones en las orientaciones de enseñanza, se muestran de manera más concreta ejemplos de situaciones que son susceptibles de ser incluidas en las fases descritas.

Primera fase. El/la docente observa el conocimiento previo del alumnado acerca del contenido a aprender, identificando aspectos esenciales como el lenguaje que moviliza, el razonamiento capaz de articular, etc. Esta información es fundamental para adaptar las siguientes fases, de modo que se evite destinar tiempo hacia los saberes ya aprendidos.

Segunda fase. Tras la selección previa de los materiales y diseño de tareas, el/la docente pone en práctica las mismas. Estas tareas generalmente son breves y suelen ser cuestiones que supongan el punto de partida para que el alumnado comience a investigar. Los conceptos, propiedades, representaciones, etc. emergen y configuran la red de relaciones del nuevo nivel de razonamiento.

Tercera fase. Una vez que el alumnado ha tenido la oportunidad de explorar la situación planteada, se invita a que exprese sus descubrimientos, sus indagaciones. No solo es importante que comunique sus ideas de manera escrita

sino también oral, dando la oportunidad de intercambiar sus resultados a través de la interacción. Estas puestas en común permiten al profesorado revisar el lenguaje que el alumnado está movilizando. Las interacciones permiten al alumnado organizar sus ideas, articulando los conceptos o propiedades que van emergiendo. El intercambio de ideas favorece el enriquecimiento personal ya que se da la oportunidad de que aprendan unos de otros. Esta fase tiene carácter transversal, pudiendo organizar charlas de aula a modo de puestas en común en cualquier momento de la actividad. Es importante remarcar que en esta fase no se realizan explicaciones de carácter formal, sino que se trata de ayudar a progresar en el uso de un lenguaje cuidadoso y preciso.

Cuarta fase. Las tareas de esta fase son más complejas que en la segunda fase. No se trata de la repetición de tareas realizadas en fases anteriores ni de meros ejercicios, sino que se trata de tareas que combinen lo que se ha ido aprendiendo para explorar nuevos caminos. Las tareas de esta fase van a completar la red de conexiones entre conceptos y propiedades que se empezó a crear en la resolución de las tareas de fases anteriores. En esta fase se atiende de manera directa a la inclusión, al estar constituida por tareas que permiten diferentes caminos para su resolución, ya que exigen reflexiones más profundas y dan la oportunidad de construir el andamiaje necesario para llegar al techo alto. Por tanto, tanto en la segunda como en la tercera fase las tareas que se presentan se corresponden con tareas de suelo bajo en su mayoría.

Quinta fase. Esta última fase está reservada para que el/la docente recoja todo lo que ha ido apareciendo e institucionalice el conocimiento. Por tanto, el/la docente sintetiza lo aprendido y lo conecta con otros contenidos ya conocidos por el alumnado. En esta fase también se puede contemplar intervenciones por parte del alumnado, aunque el mayor peso queda sujeto a la intervención y actuación del/de la docente.

IV.4. Ejemplificación de situaciones de aprendizaje

Ejemplo de situación de aprendizaje [1]: Midiendo como los egipcios

Introducción y contextualización:

Unidad didáctica para trabajar la fracción desde el enfoque de medida dirigida a 1º ESO y 2º ESO. La fracción es un concepto que supone dificultad para el estudiante porque rompe con sus esquemas conocidos de cómo funcionan los números que han trabajado hasta el momento; a la vez es un elemento matemático que tiene diversos tratamientos o enfoques: parte-todo, cociente indicado, operador, medida y razón. La unidad didáctica se basa en la introducción de la fracción con significado de medida en lugar de introducirla como división indicada o con significado parte-todo que es el método más tradicional. A partir de esa base se llega a los conceptos de equivalencia, orden, densidad y después a las operaciones suma, resta, multiplicación y división. El presentar al alumnado la fracción como medida facilita su comprensión como número, y además conecta mejor con su utilización como razón en proporcionalidad, en probabilidad como medida de la incertidumbre y con el cociente indicado como reparto.

Objetivos didácticos:

- Profundizar en la fracción como número que expresa la medida de una cantidad de magnitud.
- Desarrollar los conceptos de equivalencia, el orden y la densidad de fracciones desde el significado de medida.
- Utilizar las fracciones en contextos de resolución de problemas de la vida real.
- Operar con fracciones dando sentido a los algoritmos que se utilizan desde el significado de medida

Elementos curriculares involucrados:

Sentido numérico: estimación, uso de números fraccionarios y decimales, recta numérica, selección de utilización y representación más adecuada de una cantidad para cada situación o problema, aplicar estrategias de cálculo mental elementales, reconocimiento y aplicación de operaciones para resolver problemas contextualizadas, uso de factores, múltiplos y divisores, orden en la recta numérica.

Sentido de la medida: atributos mensurables de objetos físicos y matemáticos, elección de las unidades adecuadas en problemas, toma de decisiones justificadas del grado de precisión requerida en situaciones concretas

Sentido espacial: modelización geométrica para representar y expresar relaciones numéricas con situaciones up and down.

Sentido socioafectivo: fomenta la curiosidad y la iniciativa, desarrolla la flexibilidad cognitiva ya que supone un cambio de estrategia en el manejo de los números distinto al trabajado con los números naturales, y al trabajar por parejas y con materiales manipulativos en algunas sesiones se favorecen técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo, compartir ideas y respetar las diferencias de opiniones.

Esta actividad se desarrolla desde el enfoque de resolución de problemas, explorando diferentes modelos de representación, que favorece la argumentación y el razonamiento, así como la comunicación, por lo que se trabajan especialmente las competencias CE.M1, CE.M2, CE.M3, CE.M5, CE.M6 y CE.M9.

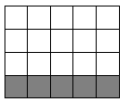
Conexiones con otras áreas:

En primer lugar, da sentido a la conexión entre los saberes propios de la asignatura de matemáticas puesto que la fracción conecta con el razonamiento proporcional y el probabilístico lo que permite plantear situaciones diversas relacionadas con diferentes contextos que tengan relación con otras asignaturas.

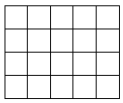
Descripción de la actividad:

La unidad en 1º ESO y 2º ESO se estructura en torno a dos bloques fundamentales, cada uno de ellos consta de 6 sesiones de aula y de una séptima sesión de evaluación, en total son 14 sesiones. En la primera parte se trabaja el concepto de fracción desde el modelo de medida, siendo las dos primeras sesiones fundamentalmente manipulativas. También se trabaja la equivalencia y el orden de fracciones, pasando ya a resolver situaciones contextualizadas utilizando como novedad respecto a otras propuestas de enseñanza, tareas para el desarrollo del razonamiento up-and-down consistentes en, dada una medida, construir otra pasando previamente por la unidad, como muestra este ejemplo:

[2] Esta cuadrícula muestra lo que cabe en un recipiente de pintura. La parte sombreada representa $\frac{5}{2}$ litros de pintura.



a) ¿Cuál sería la representación gráfica de 1 litro?



b) ¿Cuántos litros caben en el recipiente?

Metodología y estrategias didácticas:

Para introducir la fracción desde un modelo de medida, proponemos al alumnado situaciones reales en las que tienen que medir (centrado en la magnitud longitud en 1º ESO y en la de superficie en 2º ESO) usando unidades no convencionales y en las que aparezca la fracción como resultado de dichas medidas. Es posible que, en la primera fase del modelo general de diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3), el/la docente se percate que el alumnado de primer curso percibe la fracción desde el significado de parte-todo, sin asociarla a la medida de cantidades de magnitud. Queremos introducir este nuevo significado y para ello vamos a plantear actividades de medida comenzando con por la magnitud de longitud, por lo tanto, elegimos una unidad de medida que pueda fraccionarse en partes iguales que resulten sencillos de manejar y manipular (en concreto, interesa que el alumnado pueda dividirlos “manualmente” en partes iguales) y que cree un clima de aula que favorezca la actitud de curiosidad e investigación para realizar el trabajo. Tanto en 1º ESO como en 2º ESO se trabajan las sesiones manipulativas por parejas, o en grupos de tres o cuatro personas y el resto de las sesiones se puede ir combinando trabajo individual o también por parejas y puestas en común y debate en el gran grupo.

Para ello contextualizamos en 1º ESO las actividades de medida de longitud en la civilización egipcia donde ya se usaban las fracciones en tareas de medida y no existía ni el sistema métrico decimal ni la notación decimal actual. Al alumnado le explicamos que, al querer medir de forma precisa algunas longitudes con una unidad concreta, aparecían objetos que no podían medirse con un número entero de unidades. Surge de aquí la necesidad de fraccionar (partir) la unidad en partes iguales para crear unidades (subunidades) más pequeñas. Se propone utilizar una de las unidades

de longitud que usaban los antiguos egipcios, se llamaba BU (bw), y se traduce como “codo sagrado", que es, aproximadamente la distancia del codo a la muñeca y equivale a 29,92 cm. Esta longitud es una buena aproximación a la medida del largo de un folio tamaño DIN A4 (29,7 cm), que es un material fácil de conseguir; así que se pueden generar con folios DIN A4 y guillotina tiras que representarán los BU. El alumnado puede pintar, dividir, trocear, en definitiva, manipular a su antojo, estas tiras que usamos como unidad de medida y a cuya cantidad de longitud llamamos BU.

Una vez presentada la unidad de medida, el BU, se pide al alumnado que mida tiras de papel (construidas a partir de rollos de papel de caja registradora) a las que llamamos "papiros". Es decir, el alumnado tiene que decir cuántos BU miden los papiros que les proporcionamos. La única condición que introducimos es que la medida la tienen que venir expresada con una sola subunidad, la que ellos elijan, es decir, procuramos que no aparezcan números mixtos (en vez de 2 BU y medio BU, les pedimos que midan solo en medios BU y digan que el papiro mide cinco medios BU).

Longitud 1º ESO

Superficie 2º ESO

Situados en la segunda fase del modelo general de diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3), los alumnos y las alumnas se ven obligados a expresar con fracciones los resultados de las medidas de determinadas cantidades de longitud. Empiezan así a manejar la representación simbólica de la fracción. A la vez que hacen el trabajo con el material, les pedimos que representen lo que han hecho en una ficha de trabajo:

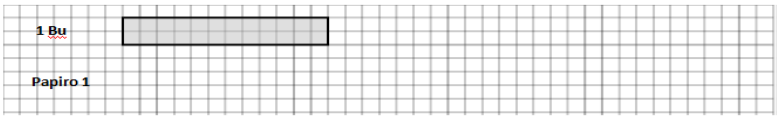
Tenéis que expresar ***lo que miden de LARGO*** *los siguientes trozos de papiro que os vamos a entregar usando como* ***unidad de media 1 Bu.***

Los trozos de papiro no se pueden romper ni doblar y pintadlos lo menos posible. Los Bu's se pueden doblar y cortar. Recordad que tenemos que medir el largo de los papiros de la forma más exacta posible.

Una vez que tengáis el resultado comentadlo con el profesor y rellenad la ficha:

1. Representando cómo habéis medio el papiro.
2. Expresando el resultado en forma de fracción.

EJERCICIO 1:

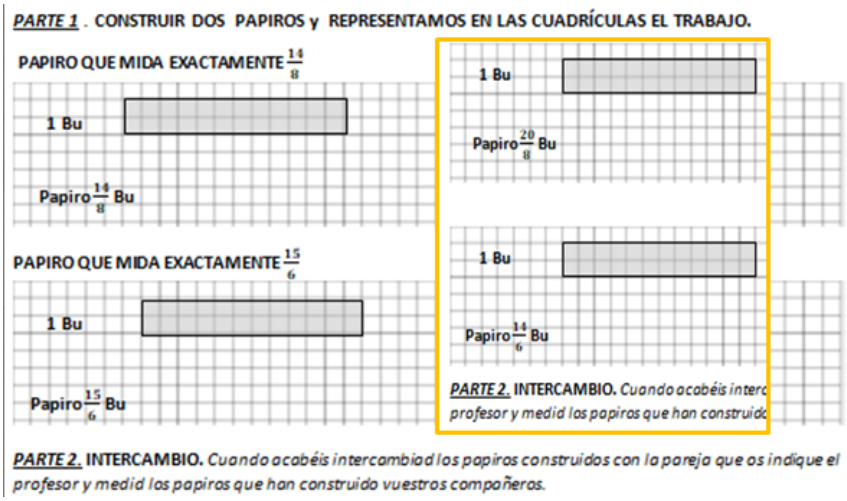


Resultado: El papiro número 1 mide: Bu

Completa:

(a) El Bu (la unidad) lo he tenido que dividir en_____partes IGUALES. (Márcalo en la representación gráfica)
(b) Cada una de esas partes iguales se llama.....
(c) Y el papiro que he medido necesita _____de esas partes

Tras familiarizarse con esta técnica de medida directa, pasamos a proponer actividades de construcción de papiros que tengan una determinada cantidad de longitud dada. Para ello hacemos dos modelos de ficha con datos diferentes. El alumnado construye los papiros solicitados y luego los intercambian con otra pareja que tiene que “adivinar” qué miden los papiros recibidos. Como las medidas proporcionadas son fracciones reducibles promovemos que aparezca el concepto de fracción equivalente cuando otros estudiantes miden el papiro que ha construido otra pareja utilizando otra subunidad diferente. Cabe señalar que con este tipo de actividades se espera que aparezca, de manera natural y muy nítida, en la tercera fase del modelo general de diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3), el concepto de equivalencia de fracciones dado que los alumnos y las alumnas las percibirán como aquellas que poseen la misma cantidad de magnitud, aunque se representen de diferentes formas:

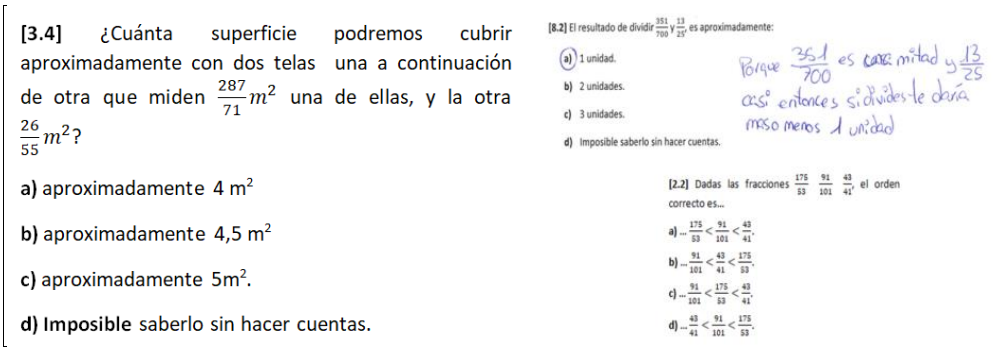


En 2º ESO, se sigue la misma estructura en la unidad, pero con la medida de cantidades de superficie y para dar continuidad al contexto de 1º ESO, la unidad de medida será un cuadrado de lado 1 BU, al que llamaremos BU cuadrado, y los objetos a medir serán manteles de diversas medidas de largo y ancho.

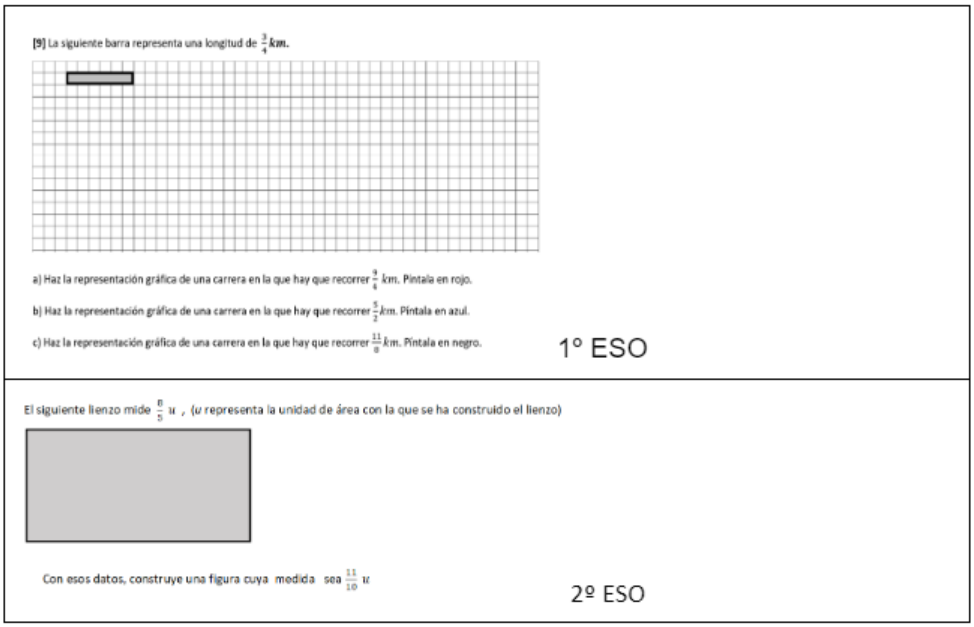
Desde el principio combinamos las actividades manipulativas con la representación gráfica de estas actividades, ya que el hecho de trabajar un concepto desde varias representaciones facilita su comprensión. Poco a poco, se abandonan las actividades manipulativas para trabajar solo con la representación gráfica y la simbólica. También a lo largo de la unidad se fueron introduciendo otras magnitudes diferentes a la longitud (y de la superficie) pero manteniendo como sustrato las representaciones gráficas que habíamos trabajado al principio de la unidad.

Situados en la cuarta fase del modelo general de diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3) proponemos plantear a los alumnos y a las alumnas actividades más abiertas, como las siguientes:

- Actividades de respuesta múltiple en las que, sin hacer operaciones, deban dar la respuesta correcta argumentando su elección a una pregunta que involucra ordenar, sumar, restar, multiplicar, … fracciones y que desarrollen el sentido numérico de la fracción como una representación de un número racional.



- Actividades para coordinar la idea de fracción como unidad múltiple con la idea de fracción unitaria como unidad iterativa (razonamiento up and down). Conseguir establecer esta coordinación implica un avance conceptual importante en el concepto de fracción y permite avanzar en la relación entre los significados parte-todo y medida y en su representación gráfica



- Actividades de invención de enunciados (problem posing). Inventarse problemas no es sencillo, por lo que conviene orientar al alumnado dándole diferentes niveles de concreción como puede ser la operación a realizar, la magnitud a utilizar, la unidad o los protagonistas para facilitarles el generar un contexto. Sobre las producciones de los estudiantes surge el diálogo, la aclaración de conceptos y el realismo de las propuestas, dando así sentido al uso de fracciones en situaciones realistas a través de la participación y la escucha activa.

Atención a las diferencias individuales:

El trabajar por parejas o en equipos pequeños ya es una forma de atender a estas diferencias individuales, ya que permite tanto crear parejas y grupos en las que los propios estudiantes se apoyen, o bien crear grupos homogéneos en los que el profesorado puede incidir u orientar la tarea según considere conveniente. Una vez creada la base del material a trabajar, se puede ampliar con materiales de refuerzo tanto para el alumnado que necesita más tiempo de experimentación, como con retos de mayor complejidad para el alumnado que necesita investigar de forma algo más avanzada, por ejemplo, con actividades up and down de cierta complejidad.

Recomendaciones para la evaluación formativa:

Se propone la realización de puestas en común sobre las tareas, tanto las de aula como las realizadas en casa estableciendo diálogo de aula, en los que el alumnado reflexione y verbalice sobre los aciertos y errores cometidos, lo que más haya costado hacer y lo qué ha aprendido a hacer que no sabía antes.

Se recomienda plantear situaciones que puedan ser resueltas desde diversas perspectivas, valorando la eficacia, validez o pertinencia de las mismas en grupos de trabajo y puesta en común y también de forma individualizada.

Para ver más detalles sobre esta actividad, se puede consultar Domenech y Martínez (2019).

Ejemplo de situación de aprendizaje [2]: Polígonos aparentemente regulares

Introducción y contextualización:

Se plantea una situación de aprendizaje para trabajar en 4º de ESO (B) una aplicación de la trigonometría a la construcción de polígonos aparentemente regulares mediante la construcción de triángulos rectángulos con ángulos aproximados a los ángulos centrales de los polígonos regulares. Se pretende aprender a través de la resolución de problemas sobre el significado del error en las construcciones y cómo las herramientas matemáticas, en este caso la trigonometría, permiten detectarlo y medirlo.

Objetivos didácticos:

- Emplear la trigonometría para la resolución de problemas.
- Reflexionar sobre las construcciones aproximadas y exactas de polígonos regulares.

- Utilizar las ideas de error absoluto y relativo para comparar la adecuación de una construcción geométrica.
- Utilizar ideas de semejanza geométrica en un contexto trigonométrico.

Elementos curriculares involucrados:

Sentido numérico: Aproximación de ángulos, aproximación de números irracionales mediante números racionales, cálculo del error absoluto y relativo.

Sentido de la medida: Aplicaciones de la trigonometría a la construcción de triángulos.

Sentido espacial: Construcciones de polígonos de forma aproximada, relaciones de ángulos en triángulos semejantes.

Sentido socioafectivo: se favorece el trabajo en equipo, ayudando a superar los obstáculos y las frustraciones asociadas habitualmente a la resolución de problemas en Matemáticas.

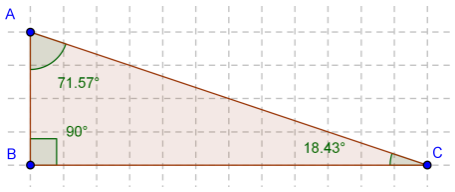
Es una actividad que se trabaja desde la resolución de problemas, que favorece la argumentación y el razonamiento, así como la comunicación, por lo que se trabajan especialmente las competencias CE.M2, CE.M3, CE.M4, CE.M5, CE.M8 Y CE.M9.

Descripción de la actividad:

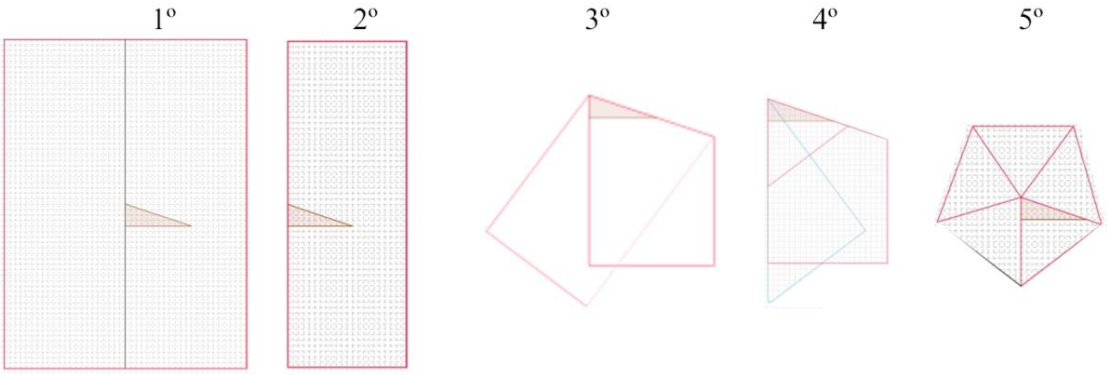
La actividad se organiza tratando de seguir las 5 fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele. Estas fases están descritas en las orientaciones didácticas del sentido espacial de la ESO.

Fase de información:

Se proporciona al alumnado una hoja cuadriculada con un triángulo rectángulo de catetos 4 y 12 dibujado en el centro:



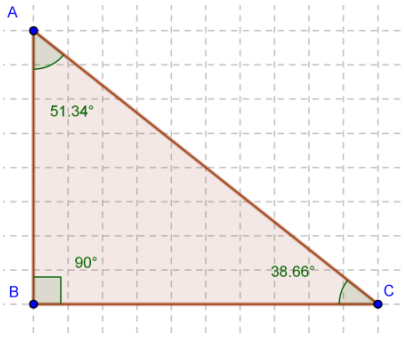
Siguiendo el esquema siguiente, doblando sucesivamente la hoja cuadriculada y cortando con tijeras, el alumnado puede construir el pentágono de la figura.



Fase de orientación dirigida:

Se pide al alumnado que construya en el centro de otra hoja cuadriculada un triángulo rectángulo de lados 8 y 10 y que calcule la medida de los tres ángulos (90°, 51,34° y 34,66°). Para realizar este cálculo tendrán que utilizar trigonometría, no un transportador.

A partir de este triángulo, siguiendo el proceso anterior (aunque doblando una vez más) se puede obtener otro polígono aparentemente regular (el heptágono).



Se pide estudiar si el pentágono y el heptágono pueden o no ser regulares (al margen de errores de doblado del papel). Esto requiere repasar qué es un pentágono regular y qué características tiene, incluyendo la medida del ángulo central.

Dado que los cinco/siete triángulos isósceles surgen del mismo corte con tijeras, el polígono resultante parecería ser equilátero y equiángulo, pero lados y ángulos varían ligeramente debido a los dobleces en las hojas. Además, el ángulo central no es exactamente de 72° o de 51,42°, con lo que ya es teóricamente imposible que lo sea. Este hecho lo deben conocer ya que han calculado los ángulos del triángulo previamente.

Fase de explicación:

En esta fase el objetivo es que el alumnado verbalice sus ideas sobre geometría, en este caso sobre la definición de polígono regular y sobre las funciones trigonométricas empleadas. Se pueden proponer unas preguntas específicas sobre las funciones trigonométricas sencillas para promover el debate:

- Sobre trigonometría: ¿podrías resolver el problema anterior con otra función trigonométrica? ¿obtendrías los mismos valores? ¿requeriría más o menos esfuerzo? Estas preguntas pueden motivar una reflexión sobre la posibilidad de resolver un problema con diferentes herramientas.
- Sobre propiedades de los polígonos regulares: ¿todos los pentágonos con 5 ángulos iguales son regulares? ¿Y con cinco lados? No se debe olvidar que el alumnado está en un nivel en el que todavía no tiene asentado cómo crear definiciones y este tipo de preguntas pueden ayudar a adquirir la idea de suficiencia y minimalidad en las mismas.

Fase de orientación libre:

Se pide diseñar un triángulo rectángulo que sirva para construir un decágono. Se pide discutir si puede haber más de un triángulo igualmente válido para la construcción (triángulos semejantes). También se propone buscar un método de comparación entre los triángulos que unos y otros propongan (calcular el error absoluto y relativo cometido al construir los ángulos centrales de cada polígono).

Fase de integración:

En esta fase, el profesorado debe revisar el procedimiento seguido y poner en orden las ideas geométricas que han aparecido a lo largo de la actividad y las relaciones entre las mismas, en particular: trigonometría, semejanza, errores y polígonos regulares.

Para ver más detalles sobre esta actividad, se puede consultar Arnal-Bailera (2016).

Metodología y estrategias didácticas:

Se trata de poner en juego las cinco fases de aprendizaje de van Hiele con la idea de afianzar el progreso del alumnado hasta el nivel 3. Se propone el trabajo en equipos de 4 estudiantes y que la intervención del profesorado se adapte a lo que cada fase requiere:

Fase de información: El profesorado presenta el material, en este caso los triángulos que generan ángulos centrales y muestra cómo doblar y cortar para obtener el polígono de que se trate.

Fase de orientación dirigida: Dado que las actividades son mecánicas, el profesor atiende dudas más procedimentales que conceptuales.

Fase de explicación: El profesorado procura que el alumnado ponga en común sus ideas, primero dentro del grupo pequeño y después en gran grupo.

Fase de orientación libre: Si bien esta es una fase de aprendizaje a través de la resolución de problemas, el profesorado debe ser guía de la misma y procurar que el grupo funcione de un modo cohesionado y que todos los miembros comprendan la actividad y aporten a la misma en la medida de sus posibilidades.

Fase de integración: El docente o la docente, solos o con la ayuda de algún alumno o alguna alumna, deben plasmar (por ejemplo, en un esquema en la pizarra) cómo esta actividad enlaza ideas relativas a la definición de polígono regular, ángulo central, aproximación de ángulos, cálculo de errores y semejanza).

Las cinco fases no tienen que desarrollarse necesariamente en una hora de clase, más bien la situación completa debería abarcar dos horas de clase al menos para dar tiempo a la reflexión y a la adecuada argumentación de las respuestas de los estudiantes.

Atención a las diferencias individuales:

Trabajar en equipos pequeños ayuda a atender las diferencias individuales, ya que permite que los propios estudiantes se apoyen. No obstante, el profesorado debe estar verdaderamente atento a que la participación de todo el alumnado sea significativa. Particularmente, la fase de explicación por su relación con la argumentación y la fase de orientación libre por su relación con la resolución de problemas, deben ser trabajadas durante el tiempo necesario para que todo el alumnado sea consciente de qué se está haciendo en cada momento.

Recomendaciones para la evaluación formativa:

- Las fases del modelo de van Hiele promueven la evaluación formativa vía la comunicación de resultados en la fase de explicación.
- También el momento de la resolución de problemas, fase de orientación libre, es un punto interesante para realizar una evaluación formativa ya que es el punto en el que surgen las conexiones entre ideas matemáticas que no suelen tratarse de forma conjunta.

Ejemplo de situación de aprendizaje [3]: Jarrones y funciones

Introducción y contextualización:

Se plantea una situación de aprendizaje para trabajar en 2º o 3º de ESO la relación entre el sentido de la medida y el algebraico y computacional, entre otros que emergen naturalmente en la realización de las tareas propuestas. El trabajo que se va a proponer sugiere organizar a la clase en grupos de tres o cuatro personas para trabajar en pequeño grupo. También se proponen reflexiones individuales y debates en gran grupo de forma que favorezca la argumentación, el razonamiento y la comunicación.

Objetivos didácticos:

- Recoger datos en tablas numéricas.
- Representar tablas numéricas en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Analizar y describir las gráficas que representan la situación planteada.
- Modelizar las situaciones planteadas a partir del estudio de la función que relaciona la altura del agua vertida y la cantidad de agua que contiene el jarrón medida en vasos.

Elementos curriculares involucrados:

Sentido numérico: al representar cantidades en contextos de la vida con números enteros o racionales con la precisión requerida.

Sentido algebraico y computacional: al usar tablas y representaciones gráficas en el estudio y modelización de esta situación utilizando como variable dependiente la altura y la variable independiente el volumen de agua que vamos vertiendo en cada jarrón.

Sentido de la medida: al medir la altura que alcanza el agua vertida en cada paso y al establecer relaciones entre la unidad de medida escogida y medida de la capacidad/volumen total del jarrón.

Sentido espacial: al observar la forma de los jarrones seleccionados y estudiar la relación con la gráfica realizada.

Sentido socioafectivo: al fomentar el trabajo en equipo y la toma de decisiones. Se trabajan técnicas que optimizan el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático. Se favorecen las conductas empáticas e inclusivas a través del trabajo en grupos heterogéneos.

Es una actividad que se trabaja desde la resolución de problemas, que favorece la argumentación y el razonamiento, así como la comunicación, por lo que se trabajan especialmente las competencias CEM1, CE.M3, CE.M5, CE.M7, CE.M8, CE.M9 y CE.M10.

Descripción de la actividad:

Esta actividad consta de dos partes. En la primera parte, el alumnado, separado en pequeños grupos heterogéneos de tres o cuatro estudiantes, dibujará la gráfica que relaciona la altura que va alcanzando el agua que se vierte en el recipiente que le haya tocado según el número de vasos que va vertiendo y que nos sirve de unidad de medida. Este trabajo puede realizarse en el cuaderno o bien con herramientas tecnológicas, realizando un informe en un documento escrito y dibujando una gráfica con Geogebra. En la segunda parte, los grupos deberán hacer un dibujo aproximado de los jarrones que representan las gráficas que han realizado el resto de los grupos de clase.

Esta actividad se lleva a cabo en el aula ordinaria y se implementa en la clase posterior a la introducción o repaso de los conceptos de tabla de valores y gráficas. Además, el alumnado ya ha estudiado los contenidos de medida y geometría necesarios para poder sacar el máximo partido a esta situación. No obstante, atendiendo a la primera fase del modelo general de diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3) conviene que el profesorado verifique si los estudiantes poseen los conocimientos previos para abordar la primera parte de la tarea. Esta información es fundamental para adaptar las siguientes fases, de modo que se evite destinar tiempo hacia los saberes ya aprendidos.

Los materiales necesarios son:

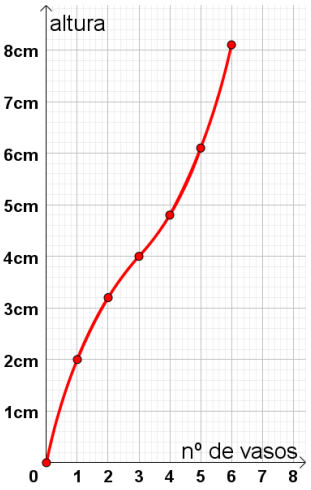
- Rotuladores permanentes para cada grupo.
- Regla.
- Vasos de distintos tamaños.
- Dos botellas (de litro y medio o dos litros) de agua por cada grupo. (También se puede realizar esta actividad rellenando los vasos con lentejas).
- Jarrones trasparentes, para que se pueda ver el nivel del agua, de distintos tamaños y formas. Uno por cada grupo. En la siguiente imagen encontramos distintos jarrones o recipientes que se pueden utilizar:

Presentación: En primer lugar, se explica al alumnado la actividad a realizar mostrándoles los diferentes recipientes. Se indica que se va a trabajar por grupos y que es necesaria la colaboración de todos. Asimismo, se explica que la actividad tiene dos partes y cuáles son los objetivos de cada una de ellas.

Preparación y generación de respuestas: Para que el alumnado pueda ir rellenado los diferentes jarrones se le facilitarán dos botellas de agua. Además, el grupo deberá elegir de cuánto en cuánto van a ir rellenando el jarrón para que la gráfica sea representativa. Para ello, dispondrán de vasos de diferentes tamaños. Es decir, el alumnado debe seleccionar la unidad de medida que va a utilizar. Debe ser una decisión consensuada por el grupo, lo que promueve la argumentación y la reflexión entre todos.

Se empieza a llenar el jarrón o el recipiente y cada vez que se introduce la unidad de capacidad seleccionada, deberán marcar la altura a la que ha llegado el agua con un rotulador permanente en el jarrón y medir dicha altura. Situamos esta primera parte de la tarea en la segunda fase del modelo general de diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3), dado que la tarea a realizar está pautada. El alumnado deberá ir recogiendo en una tabla de valores las medidas que va tomando. Por ejemplo:

Nº vasos	Altura alcanzada (cm)
0	0
1	2
2	3.2
3	4
4	4.8
5	6.1
6	8.1



Las interacciones entre el alumnado y entre estudiantes y docente serán las que lleven a realizar una actividad de modelización y así como a consensuar, dentro del pequeño grupo, la mejor representación gráfica de la función que relaciona el número de vasos vertidos con la altura del nivel de agua que se alcanza en el interior del jarrón. Estas interacciones son muy valiosas porque permiten al alumnado organizar sus ideas y articular los conceptos o propiedades que van emergiendo. Situamos estos momentos de deliberación y de comunicación previa a la representación gráfica de la función en la tercera fase del modelo general de diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3).

Antes de dibujar la gráfica, se puede preguntar cuál será la variable dependiente en esta situación. Deberán ir recogiendo todo el proceso en un documento, que se recogerá al final de la clase, donde deben constar las decisiones tomadas, así como las justificaciones correspondientes. Además, se les indica que reflexionen en la segunda parte al esbozar la forma de los jarrones dada las gráficas elaboradas por los otros grupos, los motivos por los que los dibujan así, atendiendo a un discurso lógico y formal que se detalla en el apartado de metodología.

Situamos la segunda parte de la tarea en la cuarta fase del modelo general de diseño de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3), dado que ahora la tarea consiste en interpretar la gráfica de la función que relaciona el número de vasos con la altura del nivel de agua contenida en el jarrón, y a partir de la información que ofrece la gráfica dibujar la forma del jarrón.

Validación: En la primera parte de la tarea, cada grupo irá enseñando a que gráfica corresponde cada jarrón justificándolo. De esta forma la validación se hace a través del grupo siempre bajo la supervisión del/de la docente. Para validar la segunda parte de la tarea, se propone la realización de la técnica de cabezas numeradas que se detalla en el apartado de metodología.

Aplicación y toma de decisiones: Finalmente, se reflexiona de forma conjunta sobre el proceso utilizado en cada grupo y si las unidades que han elegido son las más apropiadas. De esta actividad se extraen conclusiones para su futura aplicación en los contenidos relativos al sentido algebraico y computacional.

Metodología y estrategias didácticas:

Durante la realización del trabajo en grupo, en la primera parte, conviene que el/la docente se acerque a los distintos grupos garantizando que el alumnado haya comprendido bien el proceso. Se trata de una situación que favorece el trabajo colaborativo y cooperativo, así como la reflexión y discusión entre los compañeros y las compañeras a través de un lenguaje formal haciendo referencia a los contenidos matemáticos que entran en juego.

Para trabajar la segunda parte de la situación, se propone la técnica de trabajo cooperativo "lápices al centro". Esta técnica propicia el debate para acordar una respuesta escrita por parte de todo el alumnado, por lo que, de forma individual, se tiene que prestar atención a las argumentaciones de los compañeros y las compañeras. Para llevar a cabo esta técnica, el/la docente da a cada grupo las gráficas sobre las cuales deben dibujar la forma del jarrón que le corresponde a cada grupo. Se pueden realizar fotocopias de los trabajos que han realizado en la parte 1, que el alumnado haga una copia de la gráfica para cada grupo o, si se ha realizado de forma digital, que entreguen la gráfica a través de una tarea *classroom* con las instrucciones de la parte 1 y colgar una nueva tarea 2 con las imágenes que han subido los grupos en la tarea anterior. Por supuesto, también se pueden utilizar otros recursos tecnológicos u organización, según sea más conveniente en cada caso.

Cada estudiante debe encargarse de, al menos, una gráfica del resto de los grupos. Por turnos, cada estudiante deberá mostrar la gráfica que le ha tocado y, entre todos, por turnos, hablan de cómo se hace y deciden cual es la respuesta correcta. Todos deben aportar algo, aunque sea razonando el porqué está de acuerdo con alguno de los compañeros y las compañeras que ya han contestado. Para que se hable por turnos, se puede seguir un orden establecido de antemano. Mientras se discute, los lápices o bolígrafos de todos se colocan en el centro de la mesa para indicar que en aquellos momentos solo se puede hablar y escuchar y no se puede escribir. Cuando todos tienen claro la forma del jarrón, cada uno coge su lápiz o bolígrafo y dibujan en el documento que están realizando el ejercicio en cuestión. En este momento, no se puede hablar, solo escribir. A continuación, se vuelven a poner los lápices en el centro de la mesa, y se procede del mismo modo con otra gráfica, esta vez dirigida por otro alumno u otra alumna.

Además, esta técnica puede combinarse con la que lleva por título "cabezas numeradas": cuando todos los equipos han completado la parte 2, el/la profesor/a numera a los integrantes de cada grupo de 1 al 4 y escoge un número al azar para que un estudiante de cada grupo explique el jarrón que ha dibujado atendiendo a una de las tres gráficas que se le han asignado. El objetivo es cerrar la situación de aprendizaje corrigiendo las tareas realizadas por parte de los estudiantes. Después de las intervenciones de los estudiantes, nos situamos en la quinta fase del modelo general de situaciones de aprendizaje (apartado IV.3) en la que el/la docente sintetiza todo lo que ha ido apareciendo en el aula e institucionaliza el concepto de gráfica de una función que modeliza esta situación fuertemente contextualizada.

Atención a las diferencias individuales:

Si bien trabajar en grupos heterogéneos ayuda a atender las diferencias individuales, puesto que permite tanto crear grupos en las que los propios estudiantes se apoyen, conviene que el profesorado esté atento a que la participación de todo el alumnado sea significativa y equilibrada. La realización de la técnica de cabezas numeradas ayuda a que esto sea así. Como cada estudiante se hace cargo de una gráfica, podemos repartir las gráficas atendiendo a su complejidad. Podemos pedir que el estudiante responsable de la gráfica sea el primero en argumentar y luego, el resto de compañeros y compañeras completan esta respuesta, la discuten, etc.

Recomendaciones para la evaluación formativa:

El/la docente puede ir rotando por los diferentes grupos, escuchando las aportaciones de cada estudiante, proponiendo nuevas preguntas o aportaciones, ayudando ante posibles dificultades, etc. El discurso que se da en cada grupo es un punto interesante para realizar una evaluación formativa puesto que es donde surgen las conexiones entre ideas matemáticas que no suelen tratarse de forma conjunta. Además, los comentarios que haga el/la docente al alumnado, o entre los propios estudiantes, servirán como *feedback*. La evaluación de los objetivos de aprendizaje se realizará a través del trabajo que entrega cada estudiante al finalizar la situación de aprendizaje, así como de las argumentaciones y reflexiones realizadas durante la misma teniendo en cuenta el lenguaje formal y la conexión entre los distintos contenidos matemáticos. Para ello, el profesorado puede apoyarse en rúbricas que el alumnado debería

conocer antes de realizar las tareas de la situación de aprendizaje propuesta. A través de la rúbrica, cada estudiante puede realizar un proceso de autoevaluación pensando en qué nivel estaría para cada apartado propuesto.

Para consultar más actividades de gradación de recipientes análogas a esta, se puede consultar Shell Centre for Mathematical Education (1990).

V. Referencias

Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización: qué sabemos y qué más deberíamos saber. *Modelling in Science Education and Learning, 10*(2), 117-136.

Alsina, C. (2005). *Geometría cotidiana*. Rubes.

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense* (2nd ed). Continuum.

Arce, M. (2018). El cuaderno de matemáticas: Un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido. *La Gaceta de la RSME, 21*(2), 367-387.

Arce, M., Conejo, L., y Muñoz, J.M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Síntesis.

Arnal, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de geometría con grupos de riesgo: Un enfoque discursivo. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 157-164). Bilbao: SEIEM.

Arnal-Bailera, A. (2016). Investigando la construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel. *UNIÓN, 12*(45), 269-284.

Attard, C. (2014). I don't like it, I don't love it, but I do it and I don't mind: Introducing a framework for engagement with mathematics. *CurriculumPerspectives, 34*(3), 1–14.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E., y Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Síntesis.

Barbin, É., Guichard, J. P., Moyon, M., Guyot, P., Morice-Singh, C., Métin, F., ... y Hamon, G. (2018). *Let history into the mathematics classroom*. Springer.

Barreto, J. C. (2010). Deducción y extensión más general del Teorema de Pitágoras. *Números, 75*, 71-87.

Batanero, C. (2001). Aleatoriedad, modelización, simulación. *Actas de las X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, 119-130.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.

Batanero, C., Fernandes, J. A., y Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (62)*, 11-18.

Batanero, C., y Godino, J. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Burgos, M. (2018). Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Cultura y Educación, 30*(4), 633-662.

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education, 50* (1), 1–20.

Blanco, L. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 171-185). Ed. Graó.

Blanco, L. y Cárdenas, J.A. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto*, *32*(1), 137-156.

Blanco, L. J., Cárdenas, J. A. y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de matemáticas en la formación de matemáticas inicial de profesores de primaria*. Universidad de Extremadura.

Blanco, L. (2020). *Mirar la ciudad con ojos matemáticos*. FESPM.

Boaler, J. y Sengupta-Irving, T. (2012). Gender Equity and Mathematics Education. En J. Banks (Ed.), *Encyclopedia of Diversity in Education*. SAGE Publications, Inc.

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets*. Jossey-Bass.

Borrell, F., Pon, A., y Sager, E. (1999). Estadística y Probabilidad. En *Guías Praxis para el profesorado de ESO, matemáticas: contenidos, actividades y recursos* (pp. 376/1-71). Wolters Kluwer.

Bright, G. W. (1976). Estimation as part of learning to measure. In D. Nelson & R. E. Reys (Eds.), *Measurement in school mathematics: 1976 yearbook* (pp. 87–104). NCTM.

Brown, L. y Coles, A. (2013). On doing the same problem – first lessons and relentless consistency. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22) (pp. 617–626). Oxford, UK.

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J. y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Síntesis.

Carmona, E. y Climent, N. (2012). Comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza que sustenta el diseño de una actividad sobre las ecuaciones de la recta en 1º de Bachillerato. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 165 - 175). Jaén: SEIEM

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van Den Noortgate, W. y Onghena, P. (2009). The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. *Statistics Education Research Journal, 8* (2), 33-55.

Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales.* Síntesis.

Cid, E. y Bolea, P. (2010) Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*(pp.575-594). Université de Montpellier.

Cid, E., Bosch, M., Gascón, J. y Ruíz-Munzón, N. (2010). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En *3er Conference on the Anthropology Theory of the Didactic*. Sant Hilari Sacalm.

Contreras, J. M., Batanero, C., Cañadas, G., y Gea, M. M. (2012). La paradoja de Simpson. *Suma: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, *71*, 27-34.

De Bellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 131-147.

De Hierro, A. F. R. L., Batanero, C., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Épsilon, 100*, 49-63.

del Pino, J., y Estepa, A. (2019). Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 16*, 86-102.

Domenech, A., y Martínez, S. (2019). Actividades de razonamiento «up and down» para trabajar las fracciones en 1º de ESO. *Entorno Abierto, 29*, 13-18.

Engel, J., y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 247-258). Springer.

Esteban, M., Ibañes, M., y Ortega del Rincón, T. (1998). *Trigonometría*. Síntesis.

Fernández, F., y Segovia, I. (2011). Proporcionalidad entre magnitudes. Medidas indirectas. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros en Educación Primaria* (pp.375-100). Comares.

Ferrer, M. (2016). ¿Qué percepción tienen los estudiantes de la relación entre el área y el volumen de figuras geométricas? *Épsilon, 33*(93), 79-86.

Flores, G. (2008). *Historia y didáctica de la trigonometría*. Íttakus.

Forgasz, H. y Rivera, F. (Eds.). (2012). *Towards equity in mathematics: Gender, culture, and diversity*. Springer.

Gairín, J. M. y Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos*. Síntesis.

Giménez, J. (1996). Apuntes sobre la diversidad de conocimientos en educación secundaria. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas, 28*, 65-78

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato: ¿dos mundos completamente separados? *Suma: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 39,* 13-25.

Gil, N., Blanco, L., y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15–32.

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis.

Gonzato, M., Fernández.-Blanco, T., y Godino, J.D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 99-117.

Gómez-Chacón, I. M. (2000a). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. (2000b). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 43*(2), 149–168.

González, F.E. y Ruíz-López, F. (2003). Las centenas cuadriculadas: un material matemáticamente potente para ilustrar el tránsito de la aritmética al álgebra. *Suma: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 42*, 47-59.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1991). El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*, *3*(02), 49-65.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1998). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. GEISA: México.

Hart, K. M. (1981). Measurement. En K.M. Hart (Ed.) *Childen's Understanding of Mathematics* (pp. 11-16). John Murray.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación, 334*, 75-95.

Jiménez-Gestal, C., y Blanco, L. J. (2017). El teorema de Pick como pretexto para la enseñanza de la Geometría con Estudiantes para Maestro. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 94*, 7-21.

Joram, E. (2003). Benchmarks as tools for developing measurement sense. En: *N.C.T.M. Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook* (pp. 57-67). National Council of Teachers of Mathematics.

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., y Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(1), 4-23

Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms*. Corwin.

Macho Stadler, M., Padrón Fernández, E., Calaza Díaz, L., CasanellasRius, M., Conde Amboage, M., Lorenzo García, E., y Vázquez Abal, M. E. (2020). Igualdad de género en el ámbito de las Matemáticas. En *Libro Blanco de Las Matemáticas* (pp. 375–420). Fundación Ramón Areces, Real Sociedad Matemática Española.

Martínez-Juste, S. (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de Secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Mason, J., Barton, L. y Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2º ed.). Pearson Education Limited.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-598). Macmillan.

Moreno, M. F. (1998). *Didáctica de la matemática en la Educación Secundaria*. Universidad de Almería, Servicio de Publicaciones.

Morera, L., Fortuny, J. M., y Planas, N. (2012). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías en un entorno colaborativo y tecnológico. *Enseñanza de las ciencias, 30*(1), 143-154.

Moyon, M. y Tournès, D. (2018). *Passerelles. Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*. Arpeme.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Ortega, J., y Estepa, A. (2006). Meaning of the dispersion and its measures in secondary education. In *Int. Conf. On Teaching Statistics-7*.

Pizarro, N. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Ruíz-López, F. (2000). *La tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Sánchez, E., y Orta, A. (2015). Levels of reasoning of middle school students about data dispersion in risk contexts. *The Mathematics Enthusiast*, *12*(1), 275-289.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Segovia, I. y de Castro, C. (2013). La estimación y el sentido de la medida. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 43-49). Comares.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis.

Segovia, I., y Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(7), 499–536.

Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de las funciones y de las gráficas*. Ministerio de Educación y Ciencia.

Sowder, J. T. (1992). Making Sense of Numbers in School Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putman y R.A. Hattrup, *Analysis of Arithmetic for Mathematics* (pp. 1-52). Routledge.

Troyano, J., y Flores, P. (2016). Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras. *Épsilon, 33*(94), 51-60.

Watson, A. y Ohtani, M. (Eds.) (2015). *Task Design in Mathematics Education*. Springer.